UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
CUAUTITLÁN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Tercer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas
4,5 y 6 de Mayo de 2011

Registro del Trabajo: **203**

Estimado(s)

Aarón Reyes Rodríguez
Agustín Alfredo Torres Rodríguez
Fernando Barrera Mora

Registro Personal: ouierg

Tenemos el agrado de comunicarle (s) que su PONENCIA ORAL:

Procesos de diseño e implementación de tareas de aprendizaje matemático con alta demanda cognitiv

Presentada para este congreso, ha sido **ACEPTADA.**

El comité evaluador le(s) recomienda:

Se le sugiere cumplir con los lineamientos del congreso, mismos que puede seguir consultando en la página:http://asesorias.cuautitlan2.unam.mx/3ercongresodematematicas/.

La entrega oportuna en tiempo y forma del trabajo extenso, para quienes estén interesados, les permitirá que sea publicado en la memoria del congreso, mismo que contará con registro ISBN, por lo cual le será enviado el formato correspondiente para la Sesión de Derechos.

Le recordamos que la fecha límite para subir su trabajo extenso es el 4 de marzo de 2011 y será únicamente a través del icono que aparecerá en la página. Deberá tener presente su *Registro Personal* y el *Registro del Trabajo*, mismos que aparecen en la parte superior de este documento. De existir correcciones importantes a su trabajo, el comité se lo notificará (consultar las fechas importantes).

Para concluir con su registro al congreso, deberá subir de forma escaneada la ficha de pago, utilizando el ícono correspondiente a la recepción de pagos, su *Registro Personal* será importante para este efecto.

Sin más por el momento, quedamos de usted.

Atentamente
"Por mi Raza Hablará el Espíritu"
Cuautitlán Izcalli, Méx. a 16 de febrero de 2011

cDr. Juan Alfonso Oaxaca Luna cDra. María del Carmen Valderrama Bravo
Coordinadores Generales del Congreso

PROCESOS DE DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE TAREAS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO CON ALTA DEMANDA COGNITIVA

Agustín Alfredo Torres Rodríguez, Aarón Reyes Rodríguez y Fernando Barrera Mora
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH),
Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Col. Carboneras, C. P. 42184
Mineral de la Reforma, Hidalgo
angust68@yahoo.com.mx, aaronr@uaeh.edu.mx, fbarrera10147@gmail.com

Resumen. Las tareas de aprendizaje son un elemento fundamental para que los estudiantes construyan conocimiento matemático. Sin embargo, una tarea por sí sola no basta para que los estudiantes logren un entendimiento conceptual. Por esta razón, la interacción entre una tarea y la actividad que el docente desarrolla en el aula determinan las características del aprendizaje de los estudiantes. En este contexto, se analiza el proceso de diseño de tareas de aprendizaje con un alto nivel de demanda cognitiva, así como la implementación de estas tareas. Los resultados de la investigación permitieron caracterizar algunos de los principios teóricos y prácticos utilizados por el profesor durante el diseño de las tareas, las acciones que llevó a cabo para mantener el nivel de demanda cognitiva durante la implementación de las mismas, así como las dificultades a las que se enfrentó durante ambos procesos.

Palabras clave: tareas de aprendizaje, demanda cognitiva, tecnología.

Introducción

La importancia de las tareas de aprendizaje en el desarrollo de una forma matemática de pensar ha sido reconocida en diversas propuestas curriculares como el Proyecto QUASAR (Stein y Smith, 1998) y los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 2000). En dichas propuestas se considera que las tareas usadas en el salón de clase son determinantes del tipo de aprendizaje que los estudiantes construyen. El uso de tareas en las que los estudiantes tienen que ejecutar procedimientos memorísticos de una forma rutinaria les permitirá desarrollar una cierta forma de pensar, la cual será diferente de aquella que obtendrían al abordar tareas en las que deben pensar y razonar conceptualmente y establecer conexiones (Stein y Smith, 1998).

¿Cuáles son las características de las actividades que pueden ayudar a que los estudiantes desarrollen una forma matemática de pensar, es decir, actividades que promuevan la indagación, la búsqueda, la experimentación, el intercambio de experiencias, la recuperación de procesos de pensamiento, el planteamiento y justificación de conjeturas? ¿Cómo puede el profesor diseñar ese tipo de tareas? ¿Qué principios teóricos pueden ser de utilidad para diseñar tareas que permitan el desarrollo de un entendimiento conceptual? ¿Cuáles son las fuentes que un profesor puede tomar como base para el diseño de actividades de aprendizaje matemático? ¿Qué dificultades se enfrenta un docente durante el proceso de implementación de actividades de instrucción en el aula? ¿Cuáles son las acciones que debe llevar a cabo un docente para mantener un *alta demanda cognitiva* (Stein y Smith, 1998) durante la implementación de las tareas?

Dado que las tareas de instrucción son importantes en el aprendizaje, un docente debe llevar a cabo dos actividades centrales: (i) la identificación de principios y recursos que pueden orientar un proceso de reflexión matemática entre los estudiantes y (ii) el análisis de las condiciones para implementar actividades de forma que durante su ejecución se mantenga un alto nivel de demanda cognitiva, y se propicie la construcción de un aprendizaje con entendimiento (Hiebert, et al., 1997). En este sentido, se reconoce que los problemas que aparecen en artículos de investigación en educación matemática o en libros de texto son un recurso importante que los profesores pueden tomar como base para el diseño de tareas de instrucción (Santos-Trigo, 1997; Santos-Trigo, 2006). Sin embargo, el proceso de transformación y ajuste de esos problemas y el cómo implementarlos en el aula es un tema que se ha explorado poco en México.
Con base en las consideraciones previas, el objetivo de esta investigación consiste en analizar los procesos de diseño e implementación de actividades de aprendizaje que lleva a cabo un profesor de matemáticas. Se documentan y analizan los procesos mencionados, enfocando la atención en la medida en que las tareas y estrategias docentes puestas en práctica, son efectivas para mantener un nivel alto de demanda cognitiva durante el desarrollo de las actividades, y para alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos en la fase de diseño. Además, se identifican las dificultades o contratiempos que pueden presentarse durante la implementación de las actividades.

Marco conceptual

El marco conceptual de esta investigación se estructura con base en tres referentes teóricos: (i) resolución de problemas, (ii) tecnologías digitales como amplificadores y reorganizadores de la cognición y (iii) demanda cognitiva de las tareas de aprendizaje. La resolución de problemas es de utilidad en el proceso de diseño de las actividades, ya que proporciona algunas características de las tareas o problemas que pueden ayudar a que los estudiantes desarrollen una forma matemática de pensar (Polya, 2005/1945; Schoenfeld, 1985) y que construyan un aprendizaje con entendimiento; asimismo sirve de apoyo para que el docente tenga una idea de las características de la actividad matemática que los estudiantes tienen que desarrollar en el aula para adquirir una compresión conceptual. Por otra parte, el incluir un marco que ayude a explicar cómo el uso de las tecnologías digitales influye en la reorganización de las estructuras cognitivas resulta relevante porque es un hecho que al utilizar la computadora para resolver problemas, el estudiante se enfrenta a un nuevo realismo en el que las representaciones de los objetos matemáticos tienen la propiedad de ser dinámicas (Moreno, 2002), a diferencia de lo que ocurre en ambientes de papel y lápiz, modificando de forma profunda la actividad matemática. Finalmente, el *marco de las tareas matemáticas* (Stein y Smith, 1998) es útil porque establece otra característica importante de las tareas: el nivel de demanda cognitiva. En las tareas con un nivel bajo de demanda cognitiva se privilegia la memorización y la realización de procedimientos sin conexiones -no se asocian a otras ideas o conceptos matemáticos-; mientras que en las tareas con un nivel alto de demanda cognitiva se favorece la realización de procedimientos que favorecen un razonamiento conceptual y permiten construir conexiones entre los conceptos involucrados en el proceso de solución de un problema. Las actividades con un nivel alto de demanda cognitiva permiten al estudiante *hacer matemáticas*, lo cual significa que el estudiante desarrolle actividades tales como explorar, observar, formular conjeturas, detectar relaciones e invariantes, así como justificar y comunicar resultados.

Metodología

La metodología de este trabajo es de carácter cualitativo (Yin, 2003), interesa sobre todo documentar y analizar las cualidades de los procesos de diseño e implementación de tareas de aprendizaje, llevados a cabo por un profesor de matemáticas. Las actividades consistieron en problemas en un contexto geométrico, los cuales se abordaron empleando un software dinámico. Las actividades se implementaron en tres escenarios, con dos grupos de estudiantes de licenciatura y con un grupo de estudiantes de bachillerato.
Una de las actividades que diseñó el profesor trató sobre un tipo particular de mecanismos articulados de cuatro barras denominados mecanismos de Grashof (Figura 1), en los que una de las barras puede dar una vuelta completa, mientras que otra permanece fija. El objetivo de la actividad fue que los estudiantes establecieran un criterio que les permitiera determinar si un mecanismo de cuatro barras articuladas funcionaba como un mecanismo de Grashof. Este problema se implementó con un grupo de estudiantes que cursaban el segundo semestre de una licenciatura en física en el Estado de Hidalgo y con un grupo de estudiantes de bachillerato en el Distrito Federal. Una segunda actividad se implementó con un grupo de estudiantes de una licenciatura en matemáticas en el Estado de Hidalgo. Los estudiantes debían determinar qué lugar geométrico describe un punto en una configuración dinámica (lugar geométrico de P cuando se mueve el punto C) y justificar su conjetura. El objetivo de la actividad fue que establecieran una relación entre los registros de representación geométrico y algebraico. Los estudiantes de los tres grupos contaban con alguna experiencia relativa al uso de algún software dinámico.

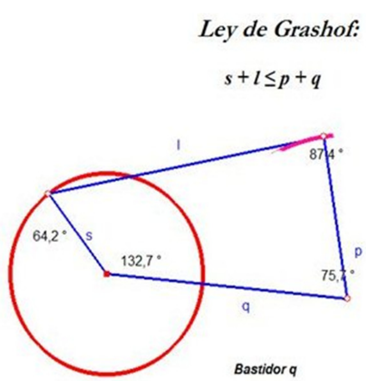

Figura 1: Mecanismo de Grashof

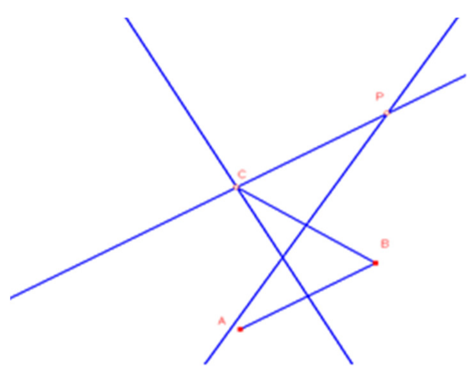

Figura 2: Configuración dinámica inicial

Las fuentes de información utilizadas en el desarrollo de esta investigación fueron las grabaciones en video de las sesiones, los protocolos escritos que elaboró el profesor como guía para implementar las actividades, así como las grabaciones en audio de dos entrevistas no estructuradas efectuadas al docente. Para el análisis de los resultados se diseñaron categorías que dan cuenta de las cualidades de dos momentos de interés: la etapa de planificación y diseño de las actividades de instrucción, y la etapa de ejecución o implementación con los estudiantes. Para analizar la etapa de la planificación y diseño de las actividades de instrucción se propusieron cuatro categorías (i) principios teóricos utilizados en el diseño de las tareas, (ii) uso de herramientas, (iii) características de los problemas y (iv) consideraciones previas al proceso de implementación. Por otra parte, para el análisis de las acciones desarrolladas por el docente durante la etapa de implementación, se consideraron las siguientes categorías: (a) recursos didácticos empleados para mantener el nivel de demanda cognitiva, (b) preguntas utilizadas para favorecer el aprendizaje.

Resultados

En el análisis de resultados de este artículo únicamente se considera la actividad de mecanismos articulados que se implementó con estudiantes de una licenciatura en física. De acuerdo con el profesor, para diseñar la primera actividad buscó en diversos libros de texto problemas en apariencia rutinarios que pudieran ofrecer a los estudiantes la oportunidad de explorar y conjeturar. Cuando empezó a diseñar esta actividad, el profesor impartía la asignatura de mecánica para la automatización, en cuyo programa de estudios se incluye el tema de mecanismos articulados, particularmente el estudio de la ley de Grashof, y se percató de que los libros de texto no explicaban las bases matemáticas de este principio y al simular estos mecanismos con el uso de un software dinámico se dio cuenta de que los estudiantes podrían por sí mismos descubrir la relación entre las longitudes de las cuatro barras de un mecanismo articulado que se expresa en la ley de Grashof. Un elemento importante para elegir la actividad fue que los problemas debían ser contextualizados.

Entrevistador: ¿Cómo fue que se le ocurrió proponer la tarea de mecanismos articulados?
Profesor: … al principio pensé en otras tareas, lo que si tenía claro desde un principio era que la tarea de aprendizaje tenía que estar contextualizada… al final de cuentas, en parte por los antecedentes que yo tenía previos a mi formación, y por algo que estuve trabajando con estudiantes de licenciatura, fue que me decidí por esta tarea que tenía que ver con el contexto de los mecanismos, y que se adaptaba a las condiciones que quería, entre otras cosas, tener una tarea no rutinaria, trabajarla con un software dinámico, me pareció atractivo de la tarea que estaba en el contexto del mundo real, de hecho se trata de modelar, de manera cinemática lo que sería el funcionamiento de un mecanismo…..y que permitiría al estudiante hacer conexiones entre sus conocimientos previos…

Para diseñar la actividad, el profesor consideró que es importante tomar en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, ya que éstos son la base para la generación de nuevo conocimiento, asimismo, expresó que el trabajo con casos particulares ayudaría al estudiante a conjeturar la ley de Grashof, pero es función del profesor lograr que el estudiante justifique las conjeturas, como lo expresa en el siguiente extracto de una de las entrevistas.

Entrevistador: ¿Qué aspectos consideró durante el diseño de la tarea sobre mecanismos articulados?
Profesor: …Se identificaron los conocimientos previos [de los estudiantes] que son requeridos para abordar la actividad, así como los nuevos conocimientos que se pueden generar y la forma en la que estos se conectan en la red conceptual del estudiante y se espera que con la información que se proporciona para la solución de la tarea, se pueda acceder a distintas representaciones… Por medio del estudio de casos particulares, se espera que el estudiante identifique patrones presentes en la actividad, que le permitan proponer conjeturas sobre el comportamiento de los mecanismos bajo observación, los estudiantes deben ser presionados por el profesor para que traten de justificar las conjeturas planteadas…El profesor debe tener especial cuidado en hacer preguntas que guíen a los estudiantes sin darles la ruta de resolución o respuesta de forma explícita, debe motivarles a tratar de justificar sus observaciones en el software…

En relación con la fase de implementación, como mencionó en la entrevista, el profesor propuso a los estudiantes analizar diversos casos particulares para que en primer lugar establecieran las condiciones que deben satisfacer las longitudes de cuatro segmentos para que con ellos sea posible construir un cuadrilátero. Un aspecto que el profesor promovió entre los estudiantes fue la comunicación de resultados como se puede observar en el siguiente extracto de una de las sesiones

Profesor:… nos puedes dar tú lo que hace rato me comentaste, nos puedes decir en voz alta ¿por qué te diste cuenta que el cuadrilátero anterior no se iba a poder construir?
Estudiante: bueno, eso era parte de la pregunta ¿no? ¿ qué criterios puedes seguir para que dados los lados de un cuadrilátero puedas decir si su construcción es posible o no… esto es porque si sumamos las longitudes de tres de los lados, esta suma debe de ser mayor al cuarto lado, porque si queda igual entonces quedaría sobrepuesto y entonces sería una línea recta ¿no? Entonces la suma de tres debe ser mayor a la cuarta…

El profesor utilizó la misma estrategia didáctica, de considerar diversos casos particulares, para que los estudiantes conjeturaran las condiciones que debe satisfacer un mecanismo de cuatro barras articuladas para ser un mecanismo de Grashof. El uso de la herramienta y las capacidades dinámicas del software permitieron que algunos estudiantes conjeturaran correctamente la ley de Grashof, como el profesor había supuesto, aunque hay que señalar que no todos los estudiantes pudieron formular la conjetura.

Estudiante 1: es que mira bueno…. Es importante, tienes estos dos y esto aquí, esto es lo más grande, este y este son nueve, este tiene que ser exactamente nueve para que pueda girar, sino se va a romper es que en el momento, mira aquí, cuando son colineales, en ese momento, esos tres juntos deben de medir la longitud del otro, del más largo para que no se reviente ¿no? Cuando son colineales, en el momento en que son colineales ¿no? Ajá, bueno cuando giran, eso es ajá, bueno en ese por ejemplo y así va a estar.
Estudiante 2: La suma de estos dos es a la misma de estos dos
Estudiante 1: ajá: ¿cómo?
Estudiante 3: este y este si los sumas te dan menos que éste.
Estudiante 1: por eso sí , sí sí sí porque por ejemplo mira cuando este está exactamente colineal todo, debe de ser de la misma longitud, o sea por ejemplo estos dos y estos dos debe de ser la misma, o como te digo, los tres deben ser la misma longitud que uno

Estudiante 3: y aparte el que tiene que girar ese el que tiene menor la longitud
Estudiante 1: exactamente, el que tiene menor longitud es el que debe de girar, si se gira el grande pues va a tronar.

Discusión y conclusiones

Una acción que se considera imprescindible para mejorar la práctica docente, es que el profesor de matemáticas planifique y diseñe actividades de instrucción que tengan características idóneas para incidir de manera positiva en el aprendizaje que logren sus estudiantes, basándose para ello en alguno de los marcos teóricos y conceptuales que han mostrado ser útiles en el proceso de entender el proceso de aprendizaje, tales como la resolución de problemas y los marcos que analizan el proceso de mediación instrumental. En relación con estos marcos, es importante que las tareas se encuentren contextualizadas y que promuevan que los estudiantes exploren, experimenten, observen relaciones e invariantes, y que justifiquen y comuniquen resultados. Se obtuvo evidencia en que el uso de casos particulares es una estrategia didáctica útil en el proceso de formulación de conjeturas. Durante la planificación del proceso de implementación de la tarea, el docente conjuntó, por un lado, su experiencias y conocimientos previos, y por otro toda una labor de investigación documental para sustentar su propuesta de trabajo. Un resultado relevante de la investigación es que la formación que posee un profesor de matemáticas es importante al momento de elegir las actividades apropiadas para los estudiantes.

Una conclusión de este trabajo tiene que ver con la concepción que posee el profesor acerca del uso que se le debe dar a una herramienta tecnológica para favorecer o potenciar diversos elementos del pensamiento matemático que el estudiante pone en juego al resolver un problema. El docente que participó en esta investigación utilizó el software como un medio para enriquecer las representaciones de un problema y como una herramienta para apoyar la formulación y justificación de conjeturas. Es decir, que su conocimiento de tales herramientas tecnológicas no se limitó a emplearla para facilitar la realización de cálculos rutinarios, sino consideró a la herramienta como un medio para lograr una reorganización cognitiva. Dos estrategias didácticas utilizadas por el docente coadyuvaron particularmente en el mantenimiento de la demanda cognitiva durante el desarrollo de la actividad: la formulación constante de preguntas a los estudiantes y la atención que otorgó a las propuestas que formulaban. La formulación de preguntas tuvo el objetivo de orientar las acciones de los estudiantes, y fomentar la discusión, tanto grupal como en los equipos que se formaron. Con las preguntas también logró presionar a los estudiantes en la búsqueda de relaciones, significados o explicaciones.

En lo concerniente a las dificultades, el docente se encontró que las principales fueron, problemas que los estudiantes mostraron para manejar el software, así como ausencia de algunos conocimientos previos requeridos para abordar la actividad. Lo anterior implica que un aspecto que no debe pasarse por alto es la pertinencia de la aplicación de una actividad de instrucción, que realmente sea la adecuada para el nivel de conocimientos y se tenga una mayor certeza de los conocimientos previos del grupo en cuestión. En el caso específico del diseño de actividades de instrucción con el empleo de un software dinámico, las acciones que desarrolla el docente son de vital importancia para que se cumplan los objetivos de aprendizaje planteados.

Agradecimientos

Los autores primero y tercero agradecen al CONACYT el apoyo recibido, a través del proyecto de investigación con número de referencia 61996, para la realización de este trabajo.

Referencias

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth: NH: Heinemann.

Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas* (pp. 81-86). Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Council.

Polya, G. (2005). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas. (Trabajo original publicado en 1945).

Santos-Trigo, M. (1997). La transferencia del conocimiento y la formulación o rediseño de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 2*(3), 11-30.

Santos-Trigo, M. (2006). Aportaciones de la investigación en educación matemática a la instrucción. *Números, 63*, 25-40.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problems Solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 268-275.

Yin, R. K. (2003). *Case Study Research: Design and Methods* (Third Edition). Thousand Oaks, CA: Sage.