UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
CUAUTITLÁN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Tercer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas
4,5 y 6 de Mayo de 2011

Registro del Trabajo: **185**

Estimado(s)

Aarón Reyes Rodríguez
Fernando Barrera Mora
Rivelino Meneses Soto

Registro Personal: ouierg

Tenemos el agrado de comunicarle (s) que su PONENCIA ORAL:

Resolución de problemas y uso de tecnologías digitales en la construcción del conocimiento matemA

Presentada para este congreso, ha sido **ACEPTADA.**

El comité evaluador le(s) recomienda:
El texto excede del limite de palabras desacuerdo los lineamientos del congreso. Se tomará en cuenta el titulo del trabajo que aparezca en su extenso.

Se le sugiere cumplir con los lineamientos del congreso, mismos que puede seguir consultando en la página:http://asesorias.cuautitlan2.unam.mx/3ercongresodematematicas/.

La entrega oportuna en tiempo y forma del trabajo extenso, para quienes estén interesados, les permitirá que sea publicado en la memoria del congreso, mismo que contará con registro ISBN, por lo cual le será enviado el formato correspondiente para la Sesión de Derechos.

Le recordamos que la fecha límite para subir su trabajo extenso es el 4 de marzo de 2011 y será únicamente a través del icono que aparecerá en la página. Deberá tener presente su *Registro Personal* y el *Registro del Trabajo*, mismos que aparecen en la parte superior de este documento. De existir correcciones importantes a su trabajo, el comité se lo notificará (consultar las fechas importantes).

Para concluir con su registro al congreso, deberá subir de forma escaneada la ficha de pago, utilizando el ícono correspondiente a la recepción de pagos, su *Registro Personal* será importante para este efecto.

Sin más por el momento, quedamos de usted.

Atentamente
"Por mi Raza Hablará el Espíritu"
Cuautitlán Izcalli, Méx. a 16 de febrero de 2011

cDr. Juan Alfonso Oaxaca Luna cDra. María del Carmen Valderrama Bravo
Coordinadores Generales del Congreso

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y TECNOLOGÍAS DIGITALES EN LA CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Rivelino Meneses Soto, Aarón Reyes Rodríguez y Fernando Barrera Mora
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH),
Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Col. Carboneras, C. P. 42184
Mineral de la Reforma, Hidalgo
riveri_23@hotmail.com, aaronr@uaeh.edu.mx, fbarrera10147@gmail.com

Resumen. El uso, cada vez más frecuente, de software matemático con fines educativos representa nuevas oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, y a la vez origina diversas interrogantes. Por ejemplo, ¿cuáles son las características de los procesos cognitivos que desarrolla un estudiante al utilizar estas herramientas como instrumentos para resolver problemas y construir nuevo conocimiento? En este contexto, el objetivo de esta investigación consiste en documentar y analizar cuáles son las características de los procesos de aprendizaje que se derivan del uso de las tecnologías digitales y establecer en qué medida las características de las herramientas determinan los mecanismos de amplificación y reorganización de las estructuras cognitivas. Los resultados de la investigación aportan evidencia de que el uso de un software dinámico puede fomentar el desarrollo de diversos aspectos del pensamiento matemático; además de que el dinamismo de las representaciones es una característica de la herramienta que influyó de forma determinante en los procesos de construcción del conocimiento y de reorganización cognitiva.

Palabras clave: tecnologías digitales, aprendizaje, resolución de problemas.

Introducción

Durante los últimos años, la resolución de problemas ha sido identificada como una actividad importante en el aprendizaje de las matemáticas. En el proceso de aprender matemáticas se pone atención especial al tipo de problemas o situaciones problemáticas que permiten a los estudiantes no sólo buscar respuestas o explicaciones, sino también reflexionar en torno al significado y formas de razonamiento asociados con la solución de los problemas. Es decir, el aprender matemáticas va más allá de memorizar y utilizar reglas, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios, los estudiantes necesitan desarrollar habilidades, actitudes así como formas de pensar, donde constantemente busquen y examinen diferentes tipos de relaciones, planteen conjeturas, utilicen distintos sistemas de representación (numéricos, algebraicos, geométricos), establezcan conexiones, empleen diversos argumentos o formas de justificación y comuniquen sus resultados, además se reconoce la importancia de que los estudiantes utilicen distintas herramientas computacionales en el proceso de comprensión de ideas matemáticas. ¿Qué herramientas pueden favorecer el desarrollo de un pensamiento matemático en los estudiantes? ¿Qué tipo de conjeturas y observaciones realizan los estudiantes al resolver problemas con ayuda de alguna herramienta tecnológica? ¿Qué formas de razonamiento desarrollan los estudiantes al emplear artefactos computacionales en la resolución de problemas? ¿Cuál es el papel de las representaciones dinámicas en el proceso de comprensión de ideas matemáticas?,

son preguntas que orientan el análisis y reflexión sobre la trascendencia de utilizar a las tecnologías digitales en el proceso de instrucción.
En esta dirección, el objetivo de este trabajo es identificar y caracterizar los diversos elementos cognitivos que tienen lugar durante el proceso de transformación de un software dinámico, considerado como artefacto, en un instrumento (Trouche, 2003) para la resolución de problemas. Se busca documentar la importancia de utilizar estrategias de instrucción que permitan a los estudiantes incorporar en su reflexión matemática el empleo de distintas herramientas computacionales, así como los aspectos asociados con las características de las herramientas que facilitan o dificultan el proceso de resolución de problemas y de comprensión conceptual.
El logro de los objetivos anteriores requiere de un entendimiento profundo de la forma en que se modifican los procesos de aprendizaje cuando se incorpora el uso de las tecnologías digitales al desarrollo de tareas de instrucción, y esto a su vez, necesariamente requiere de la adopción de una postura teórica que oriente el proceso de comprensión de las complejidades presentes en el entendimiento de ideas matemáticas por parte de los estudiantes.

Marco Conceptual

En este trabajo, el fundamento teórico que permitirá dar sentido a los datos obtenidos de experiencias de aprendizaje se organiza en un marco conceptual, el cual está integrado por tres elementos: (i) mediación instrumental, (ii) génesis instrumental y (iii) resolución de problemas. El principio de la mediación instrumental (Werstch, 1993), establece que las características de las herramientas utilizadas en el proceso de aprendizaje determinan la forma en que se adquiere el conocimiento. Los artefactos, como objetos materiales, han influido en el desarrollo de las matemáticas, así como en su aprendizaje. Por ejemplo, en las clases de matemáticas se usan algunos objetos manipulables como el ábaco, o las *regletas de Cuisenaire*, para ejecutar y aprender a realizar operaciones aritméticas. De acuerdo con el principio de mediación instrumental, las características del conocimiento del estudiante estarán determinadas por el tipo de herramientas y la forma en que las utilice. Sin embargo, no sólo se considera como herramientas a los objetos físicos, también los sistemas simbólicos (por ejemplo, el sistema decimal de numeración o la notación algebraica) son herramientas que indudablemente influyen en el aprendizaje, desarrollo y avance en la generación de nuevos conocimientos matemáticos. Como elemento importante de la mediación instrumental se analiza una característica que distingue a las tecnologías digitales del resto de las tecnologías para aprender matemáticas: la posibilidad de construir y operar con *representaciones ejecutables* (Moreno, 2002).
Relacionado con el principio de mediación instrumental, se incluye el constructo de la génesis instrumental (Verillon, 2000), el cual será utilizado para analizar y tratar de comprender el proceso mediante el cual un artefacto se transforma en un instrumento, es decir, la forma en cómo una herramienta material, a través de la actividad del sujeto al resolver problemas se constituye en una herramienta simbólica, la cual puede integrarse al sistema cognitivo de la persona e influir en la forma en que ésta construye su conocimiento y orienta su actividad durante la resolución de problemas.

Completa el marco de la investigación el modelo de resolución de problemas matemáticos (Schoenfeld, 1985) el cual constituye el escenario en el que se lleva a cabo los procesos de mediación instrumental y génesis instrumental. Con la integración de la resolución de problemas en el marco conceptual, se busca contar con un conjunto de principios que orienten el diseño de actividades de aprendizaje: (i) que motiven al estudiante a quererlas resolver, (ii) que permitan establecer conexiones entre los conocimientos que ya posee y aquellos que se espera que construya y (iii) que permitan abordar y resolver la tarea por distintos medios, además de que promuevan el desarrollo de aspectos del pensamiento matemático a través de la experimentación así como la discusión de ideas.

Metodología

La metodología utilizada en esta investigación es de corte cualitativo (Yin, 2003). El trabajo de campo de esta investigación consistió en observar el desarrollo de una tarea de instrucción que al ser abordada por un grupo de estudiantes, les permitiera acceder y utilizar una serie de saberes y recursos matemáticos, seleccionar distintas maneras de representar y resolver un problema. Por ejemplo, al representar un cuadrilátero, un estudiante puede pensar en lados de diversos tamaños, ángulos con diferentes medidas, o congruencias de lados y ángulos para describir la figura que desea representar. El proceso de observación de la implementación de esta actividad permitió recolectar información con base en la cual se documenta y caracteriza el proceso de transformación de un software dinámico, considerado como artefacto, en un instrumento de resolución de problemas, así como analizar el papel de las representaciones dinámicas de objetos matemáticos sobre el tipo de recursos y estrategias que los estudiantes seleccionaron al abordar la actividad con el uso del software.

La tarea de aprendizaje se implementó con un grupo de estudiantes que cursaban una Licenciatura en Física; sus últimos cursos de matemáticas habían sido: Cálculo, Matemáticas Superiores y Computación, y Geometría Analítica, los estudiantes no habían trabajado con el software Cabri, aunque habían utilizado un software similar, GeoGebra; así como el sistema de álgebra computacional MAPLE.

La actividad de aprendizaje fue diseñada considerando cuatro elementos propuestos por Barrera (2008): (i) un objetivo de aprendizaje, (ii) un conjunto de elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo de aprendizaje, (iii) la determinación de un escenario para desarrollar la tarea, y (iv) un proceso inquisitivo, estructurado a través de una ruta hipotética de instrucción.

La tarea trata sobre un tipo de mecanismo de cuatro barras articuladas, denominado mecanismo de Grashof, que es aquel en el cual al menos una de las barras puede dar una revolución completa en relación con alguna otra barra que permanece fija (figura 1).

La actividad se desarrolló en dos fases. En la primera fase (preámbulo), los estudiantes trabajaron en forma individual; con la finalidad de reconocer las funcionalidades de diversos comandos del software mediante la construcción de cuadriláteros, dadas las longitudes de sus lados. En la segunda fase (actividad central), los estudiantes trabajaron en parejas, con el propósito de obtener un criterio para determinar las condiciones que debe satisfacer un mecanismo de cuatro barras articuladas para funcionar como un mecanismo de Grashof.

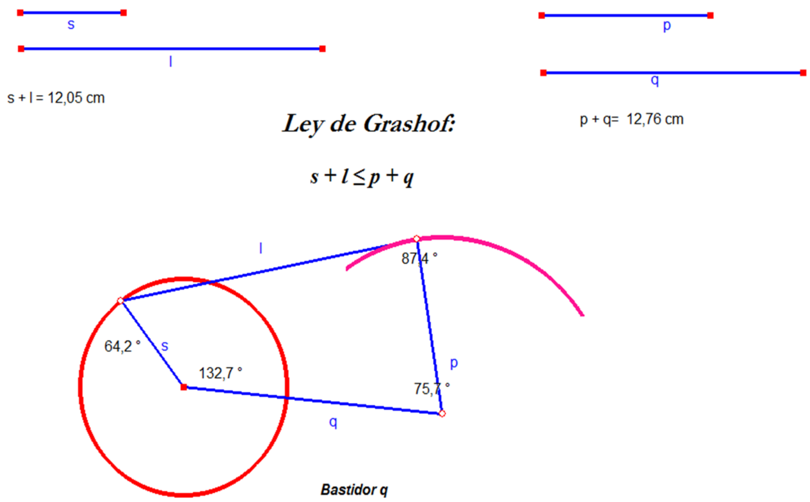

Figura 1: Representación de un mecanismo de Grashof elaborada en Cabri

Durante el proceso de recolección de datos uno de los investigadores del equipo dirigió la actividad, mientras que el resto del equipo llevó a cabo una observación no participante. Es decir, su función fue únicamente observar, grabar y tomar notas. Esta técnica fue de utilidad ya que el objetivo de la investigación es documentar cómo el software dinámico se puede transformar en un instrumento que ayude a los estudiantes a generar distintas representaciones que le permitan visualizar elementos esenciales alrededor de la solución de un problema, además de detectar en qué momento el estudiante se apropia de la herramienta y la utiliza en la resolución de la tarea de aprendizaje con el fin de ampliar algunos aspectos del pensamiento matemático. Las fuentes de recolección de datos fueron la guía de la actividad, un cuestionario de salida y las grabaciones en video de la tarea, junto con notas de campo realizadas durante el proceso de observación.

La unidad de análisis es el grupo, aunque en ocasiones se centra la atención en algunos estudiantes de forma individual o en los equipos que formaron los estudiantes. Se busca conocer la forma en que se desarrolló el proceso de génesis instrumental considerando al grupo como una unidad estructural que incluye a los estudiantes, al instructor y al escenario en el que se desarrolla la tarea.

Una vez que se tuvieron las transcripciones de los videos se establecieron categorías de análisis con el objetivo de resumir y analizar la información. Se elaboraron dos clases de categorías, las primeras tuvieron la finalidad de identificar los procesos cognitivos que mostraron los estudiantes durante las dos fases de la génesis instrumental: (i) fase de instrumentalización-esquemas de uso, y (ii) fase de instrumentación-esquemas de acción instrumentada. Asimismo, se creó otro conjunto de categorías a través de la cual se identificaron los diferentes elementos del pensar matemáticamente que desarrollaron los estudiantes durante su interacción con la tarea de aprendizaje. Las categorías fueron las siguientes: (a) construcción de ejemplos, contraejemplos y uso de casos particulares, (b) uso de heurísticas de resolución de problemas, (c) formulación de conjeturas, (d) justificación de resultados.

Resultados

Al desarrollar las actividades del preámbulo los estudiantes se familiarizaron con los comandos de Cabri, principalmente los estudiantes conocieron la utilidad de comandos como número, compás, segmento, punto de intersección, polígono, distancia o longitud, ocultar/mostrar, así como el uso del arrastre para verificar que los objetos geométricos se construyeron con base en las propiedades que los definen. En esta fase, el artefacto ayudó a los estudiantes a observar y conjeturar las condiciones que deben satisfacer cuatro segmentos para que a partir de ellos sea posible construir un cuadrilátero. Además, hay evidencia de que los estudiantes desarrollaron una actividad orientada a conocer las distintas funciones de los comandos de la herramienta, mientras trataban de resolver los problemas propuestos.
En la conversación siguiente, los estudiantes justifican por qué no es posible construir un cuadrilátero con lados 2, 3, 4 y 11. La justificación se basó fuertemente en el apoyo visual que ofrece la representación del problema realizada en el software. Asimismo, el uso de la herramienta permitió a los estudiantes evaluar las diferencias entre dos problemas, uno en el que las dificultades para construir el cuadrilátero se debieron a la forma de realizar la construcción y otro en el que es imposible realizarla.

Instructor: entonces ahora que ya tienen más soltura con el software, entonces ahora introducen esos datos; 2, 3, 4 y 11 y con el compás empezamos a trazar los segmentos
Entre Estudiantes: no se va a poder, la suma de los tres lados, no es mayor que 11
Estudiante 1: No se puede
Estudiante 2: No cruzan
Instructor: ¿No cierra?, pero hace rato [en un ejemplo construido por el instructor] tampoco cerraba
Estudiante 1: pero es que aquí la suma de los otros 3 lados, no llega a hacer la otra
Instructor: ¿Entonces?
Estudiante 1: no existe, es que estos tres nunca va a cerrar.

Durante la actividad central de la tarea, no todos los estudiantes habían comprendido que las construcciones geométricas con el software se realizan con base en las propiedades de los objetos geométricos. Aún había estudiantes que construían un cuadrilátero de forma que los lados del mismo cambiaban de longitud cuando se animaba la construcción. Un error recurrente fue realizar las construcciones basadas en la percepción visual, con lo cual ocurre que los puntos no pertenecen a los objetos geométricos o las intersecciones de objetos no son realmente tales. Sin embargo, algunos estudiantes reconocían adecuadamente la funcionalidad de diversos comandos y los utilizaban en una forma que les permitió desarrollar algunos aspectos del pensar matemáticamente como son la formulación de conjeturas y la construcción de ejemplos o contraejemplos.

En el siguiente extracto, se puede observar que los estudiantes elaboran conjeturas respecto a las condiciones que deben de satisfacer las barras de un cuadrilátero articulado para funcionar como mecanismo de Grashof. La elaboración de las conjeturas se basó fundamentalmente en la percepción visual que pudieron conseguir al animar el mecanismo y modificar las longitudes de los segmentos para que este no se "tronara".

Estudiante 3: aaah, sí, por eso, debe ser porque, por ejemplo cuando este [d] está exactamente colineal todo, debe ser la misma longitud, por ejemplo estos dos [d+a] y estos dos [c+b] deben dar lo mismo o como te digo los 3 debe ser la misma longitud que uno
Estudiante 4: a parte el que debe de girar es el que tiene menor longitud [d]
Estudiante 3: exactamente, el que tiene menor longitud es el que debe de girar, si giras el grande pues se va a tronar.

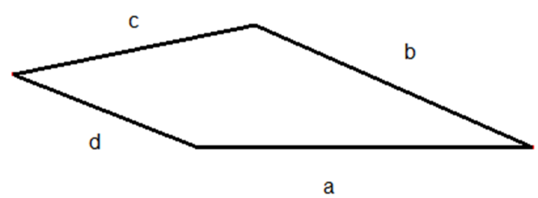

Figura 2: Representación utilizada en la elaboración de conjeturas

El trabajo en equipo fue un elemento que ayudó a los estudiantes a avanzar hacia la fase de instrumentación, así, se muestra como dos estudiantes interactúan entre sí y con la herramienta para determinar las condiciones que les permitan construir un mecanismo de Grashof. Además se presenta evidencia de que el uso coordinado del comando animación con los comandos de medida y número apoyó la formulación de conjeturas.

Estudiante 3: no, borra todo eso, selecciona todo y bórralo. No, elimina ese punto para que no estorbe y el otro de allá, ahora pon tus 4 líneas
Estudiante 4: ¿así?
Estudiante 3: ahora una larga, traza tus segmentos, toma ese segmento y con compás, ahora esa
Estudiante 4: ¿esta es la que está fija no?
Estudiante 3: sí, ahora el circulo de ese, no... Bórralo
Estudiante 4: tranquilo, este aquí y ahora este va acá
Estudiante 3: no salió
Estudiante 4: dale control "z", y ahora traza el otro, el de arriba, ahora júntalo, ahí, de ahí a la intersección ahora el otro punto, ya
Estudiante 3: ahora, ponle el resortito, uy se rompió, acórtala
Estudiante 4: esta, no esa hay que hacerla más larga, acorta la otra, ahora trázalas, en las intersecciones de los círculos son los segmentos, entonces de ahí a la intersección y de ahí al otro punto
Estudiante 3: ya está
Estudiante 4: ahora ocúltalos y ponle el resortito en ese punto, huy! se rompió, acórtala y esa más grande, más, más, por ahí, ya está
Estudiante 3: ya funcionó

De acuerdo con los datos, algunos de los estudiantes iniciaron el proceso de apropiación del software dinámico y lo utilizaron para formular conjeturas y presentar justificaciones a partir de la información obtenida de las representaciones realizadas en Cabri. Esta etapa (instrumentación) se logró cuando una pareja de estudiantes desarrolló un criterio y construyó adecuadamente un cuadrilátero que cumpliera con las características para ser un mecanismo de Grashof.

El uso de la herramienta de medida se llevó a cabo en dos formas diferenciadas, por un lado, se utilizó para tener control sobre las longitudes de los lados del cuadrilátero, lo cual permitió que los estudiantes experimentaran sobre las condiciones que debían satisfacer éstas de forma que el cuadrilátero funcionara como un mecanismo de Grashof. Y por otro lado, se utilizó como un elemento para verificar que las construcciones se habían llevado a cabo de forma apropiada, por ejemplo, para verificar que las longitudes de los lados del cuadrilátero permanecían fijas cuando se animaba el mecanismo.

Análisis y discusión

Un aspecto que resulta importante resaltar es que los esquemas de acción instrumentada que desarrollan los estudiantes al trabajar con las tecnologías digitales son en gran medida contextualizados porque dependen del tipo de problemas o actividades que se propongan, así como de las herramientas utilizadas. Por ejemplo, Artigue (2002) reporta que los esquemas de acción instrumentada desarrollados por estudiantes que abordaron actividades de graficación de funciones con el uso de la calculadora TI92 fueron “esquemas de enmarcado” (framing schemes), consistentes en el uso de diferentes niveles de zoom y de escala de las ventanas de visualización para determinar las propiedades de las funciones y probar conjeturas. En el caso de este trabajo, los esquemas de acción instrumentada consistieron en la interacción entre los comandos de animación, medida y número para formular o validar conjeturas relativas a las condiciones que debe satisfacer un mecanismo de cuatro barras articuladas para ser un mecanismo de Grashof, en este contexto, el dinamismo de la herramienta fue un factor crucial durante el proceso de observación y justificación de relaciones e invariantes. Por otra parte, al igual que Artigue (2002) se observó que los estudiantes desarrollan diversos niveles de interacción con la herramienta (diversos niveles de instrumentalización) y por tanto diferentes formas de utilizarla durante el proceso de resolución de problemas. Otro aspecto sobresaliente que se puede extraer de la actividad es que los estudiantes controlan y orientan su actividad al resolver problemas en función del progreso global que han obtenido con la herramienta, en este caso, al animar un mecanismo de cuatro barras y observar que en algunos casos el mismo se “truena” orientó el proceso de modificación de las longitudes de las barras hasta obtener una conjeturas de las condiciones que debía satisfacer un mecanismo de Grashof. Lo anterior se encuentra en la línea de lo que Béguin y Rabardel (2000) denominan “mediación heurística”.

Conclusiones

Existe evidencia de que los estudiantes lograron utilizar el software dinámico de forma que orientara el proceso de solución de la tarea de aprendizaje, es decir se observó una integración de algunas características de la herramienta en la estructura cognitiva de estudiante que guiaron su actividad matemática, durante las fases de instrumentalización e instrumentación. En esta última etapa sólo se observó el inicio del proceso de apropiación del artefacto y se requiere de investigaciones a largo plazo para tener un conocimiento más amplio respecto de la integración de las características de la herramienta en la estructura cognitiva y su papel en la comprensión conceptual. Las representaciones dinámicas que se pueden construir en Cabri resultaron fundamentales en el proceso de generación y prueba de conjeturas, así como en el desarrollo de otros aspectos del pensamiento matemático como la selección de los recursos y la utilización de heurísticas.

Agradecimientos

Los autores primero y tercero agradecen al CONACYT el apoyo recibido, a través del proyecto de investigación con número de referencia 61996, para la realización de este trabajo.

Referencias

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and de dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274.

Barrera, F. (2008). Reporte de la primera etapa del Proyecto CONACYT: "Bases Teóricas y conceptuales en la Construcción del Conocimiento Matemático y el Empleo de Herramientas Digitales". Pachuca, Hidalgo.

Béguin, P., & Rabardel, P. (2000). Designing for instrument-mediated activity. *Scandinavian Journal of Information Systems, 12*, 173-190.

Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas* (pp. 81-86). Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. NY: Academic Press.

Trouche L. (2003) From Artifact to Instrument: Mathematics Teaching Mediated by Symbolic Calculators. *Interacting with Computers, 15*(6), 783-800.

Verillon, P. (2000). Revisiting Piaget and Vygotsky: In Search of a Learning Model for Technology Education. *The Journal of Technology Studies, 26*(1), 3-10.

Wertsch, J. V. (1993). *Voices of the Mind: A Sociocultural Approach to Mediated Action*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Yin, R. K. (2003). *Case Study Research: Design and Methods* (Third Edition). Thousand Oaks, CA: Sage.