Memorias

Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas

Mineral de la Reforma, Hidalgo
8, 9 y 10 de diciembre, 2008

Comité Organizador: Orlando Ávila Pozos
Rogelio Barragán Fuentes
Fernando Barrera Mora
Aarón Reyes Rodríguez
Armando Sepúlveda López

Comité Editorial: Fernando Barrera Mora
David Benítez Mojica
Aarón Reyes Rodríguez
Manuel Santos Trigo
Armando Sepúlveda López

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Centro de Investigación en Matemáticas

Para citar los trabajos contenidos en este documento, refierase al formato APA:

Barrera, F., et al. (Eds.) (2008). *Memorias del Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas*. Pachuca, Hidalgo.

Área Académica de Matemáticas
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, C.P. 42184
Ciudad Universitaria

ISBN 978-607-482-016-4

Nota: Agradecemos el apoyo financiero otorgado por el CONACYT para la organización de este Seminario, el cuál constituye una de las actividades del proyecto "Bases Teóricas y Conceptuales en la Construcción del Conocimiento Matemático y el Empleo de Herramientas Digitales", con número de registro 61996. También agradecemos a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, particularmente, al Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería y al Área Académica de Matemáticas por todo el apoyo brindado para la realización del evento.

Directorio

C. D. Luis Gil Borja
Rector

Mtro. Humberto Augusto Veras Godoy
Secretario General

M. en C. Octavio Castillo Acosta
Director del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

Dr. Orlando Ávila Pozos
Jefe del Área Académica de Matemáticas

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

Los días 17 y 18 de diciembre de 2007 se llevó a cabo el Primer Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia Michoacán. En este foro se presentaron reportes de investigación que tuvieron como eje la resolución de problemas y el aprendizaje de las matemáticas en el nivel medio superior. La temática de este seminario giró en torno a las siguientes preguntas:

¿Qué es la resolución de problemas como propuesta de aprendizaje de las matemáticas? ¿Qué cambios en el currículum son necesarios para estructurar y organizar una propuesta en términos de la resolución de problemas? ¿Qué competencias matemáticas resultan relevantes en la construcción del conocimiento de los estudiantes con base en la resolución de problemas? ¿Cuál es el papel del empleo de herramientas computacionales en el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes? (Sepúlveda, Santos y García, 2007, p. 6)[1].

Cabe destacar que la complejidad de las preguntas demanda de estudios sistemáticos y de colaboración decidida y continua entre, educadores, matemáticos y profesores. Al respecto es de crucial importancia y urgencia el proponer programas en donde la participación de cada una de estas comunidades tome las acciones que la situación reclama.

Para diseñar la agenda de actividades del segundo seminario se tomaron en cuenta las preguntas anteriores y se formularon otras. ¿Cuál es el papel del profesor cuando se diseñan actividades de aprendizaje en el marco de la resolución de problemas? esta pregunta por sí misma tiene relevancia y aunada a que en este año se planteó la creación del Sistema Nacional de Bachillerato, en donde se establece que el aprendizaje de los estudiantes debe basarse en competencias, surgen preguntas tales como: ¿qué debemos entender o caracterizar por competencia matemática y cómo se relaciona con la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes? En particular nos interesa discutir: ¿qué tipo de competencias matemáticas requiere un profesor para matematizar el aprendizaje de los estudiantes? Y ¿cómo el profesor puede construir esas competencias en una comunidad de práctica que promueva la resolución de problemas?

¿Qué características deben poseer los conocimientos matemáticos de los profesores?

¿Quiénes deben participar en la formación y actualización de los profesores de matemáticas? ¿En qué tipo de programas educativos deben participar los profesores de matemáticas para revisar y extender sus conocimientos matemáticos? ¿Cómo deben utilizar los profesores de matemáticas

---

[1] Sepúlveda, L. A., Santos, T. L. M., García P.R. (Eds.). (2007). *Memorias Primer Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas*. Morelia: UMSNH

las diversas herramientas tecnológicas en ambientes de instrucción que favorezcan la resolución de problemas?

Los trabajos que se reportan en esta publicación tienen por finalidad aportar elementos que contribuyan a encontrar posibles respuestas a las preguntas planteadas. En particular, el foco de la discusión se centra en los modelos de formación y revisión de los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores. Es importante resaltar que los participantes en este Segundo Seminario Nacional son: Educadores, Matemáticos y Profesores, quienes tendrán la oportunidad de intercambiar experiencias y puntos de vista en torno al problema del aprendizaje de las matemáticas.

Fernando Barrera Mora

Pachuca, Hidalgo Diciembre de 2008

CONFERENCIAS PLENARIAS

Emilio Lluis Puebla

Alfinio Flores Peñafiel

Fernando Hitt Espinosa

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL APRENDIZAJE DESDE EL PUNTO DE VISTA DE UN MATEMÁTICO[i]

Emilio Lluis-Puebla
Universidad Nacional Autónoma de México

Enfocado a la resolución de problemas en el aprendizaje, se hablará acerca de la Matemática, sus características, la investigación y progreso en ella. Como ejemplo del surgimiento de una teoría matemática se presenta la K-Teoría Algebraica y los problemas que la originaron. También, como matemática aplicada se hace lo correspondiente con la Teoría Matemática de la Música. Se hablará acerca del aprendizaje de la Matemática, cómo se realiza, etc. Se señalará un problema específico en la enseñanza y una propuesta para solucionarlo. También se exponen pensamientos acerca de la Computación y su relación con la Matemática.

La Matemática es una de las Bellas Artes,
la más pura de ellas,
que tiene el don de ser
la más precisa
y la precisión de las Ciencias.
E. Lluis-Puebla.

Introducción

En este artículo, correspondiente a la conferencia que sustentaré durante el Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y Aprendizaje de las Matemáticas escribo acerca de la resolución de problemas así como de los problemas en el aprendizaje. Para comenzar deseo exponerles el punto de vista de un matemático acerca de los distintos tipos de problemas en la Matemática y así tener una perspectiva.

Voy a entretejer varios temas que irán tratando las dos interpretaciones del título (tal cual me fue propuesto) para esta conferencia los cuales juntaremos posteriormente. He procurado, salvo en algunos casos específicos, describir con palabras comunes (algo muy difícil para los matemáticos) algunos de los temas con el fin de ofrecerles un aspecto panorámico acerca de estos.

Algunas de las ideas expresadas en esta conferencia son mías y otras provienen en particular, del gran matemático Michael Atiyah. Les comento que desde mis años de estudio profesional y de posgrado he leído sus artículos de divulgación, las entrevistas que le han realizado, escuchado sus conferencias, estudiado sus textos y artículos de investigación, en particular los de K-Teoría. Sin duda es, no solamente uno de los más destacados matemáticos de la segunda mitad del siglo XX, sino también uno de los pensadores más acertados acerca de la Matemática misma.

La Matemática posee una enorme aplicabilidad y constituye un lenguaje y marco indispensable para todas las ciencias. Ésta es una de las razones por la cual no solamente unos cuantos individuos dedican su vida a ella sino que es materia de estudio en el sistema educativo y parte de la escena social.

Sin duda, la investigación matemática es la disciplina científica más alejada del hombre de la calle quien no posee absolutamente ninguna idea acerca de ella. Generalmente identifica a la Matemática con las ideas que difícilmente pudo absorber (a menudo sin éxito) en la escuela primaria o secundaria. La Matemática o lo que cree que es, le parece fría y cruda, sin vida (incluso habla de la frialdad de los números). Difícilmente se imagina que la Matemática fue creada en el pasado y sigue creándose en el presente por algunos humanos. Le es muy difícil comprender el hecho de que sea una disciplina intelectual abstracta y que posea una existencia independiente y floreciente.

Características de la Matemática

La Matemática posee varias características que la hacen diferir de otras disciplinas.

La primera es que es muy difícil de describir o definir su materia de estudio. Es claro cual es la materia de estudio de algunas áreas de la Astronomía o de la Biología pero no de la K-Teoría Algebraica. Esto se debe fundamentalmente a que los objetos de estudio son conceptos definidos de manera abstracta los cuales a menudo van encadenados a otros conceptos previamente definidos. Su descripción se reduce a definiciones formales que requieren de conexiones neuronales las cuales requieren de cierto tiempo para realizarse. Esto, aunado a una madurez matemática o entrenamiento matemático le permite al ser humano asimilar una buena cantidad de ideas abstractas. Por ejemplo, trate usted de explicarle a su "sobrinita preguntona" qué es la adición, o de qué se trata la Geometría Analítica, o qué es un anillo. Requerirá, después de muchas explicaciones intuitivas, establecer definiciones formales y tiempo, mucho tiempo.

La segunda característica es que posee una lógica perfecta. La Matemática de Euclides es tan válida hoy como en la época de Euclides. Esto contrasta con otras teorías, como la de la tierra plana o la del flogisto o la del éter.

Recuérdese que trescientos años antes de Cristo, Euclides estableció los fundamentos de la Geometría. Su libro es el segundo libro más traducido y copiado después de la Biblia y todavía se enseña en nuestras escuelas primarias. Pero la importancia mayor de los Elementos de Euclides radica en que los presentó como un sistema deductivo. Presentó unas ideas elementales evidentes, las cuales se pueden combinar a través de manipulaciones lógicas para dar resultados cada vez más complejos. El proceso deductivo se conoce con el nombre de demostración. Así que la Geometría Euclidiana es el primer modelo formal de un sistema deductivo, el cual se ha convertido en un modelo a seguir. La Geometría se convirtió y sigue utilizándose como un modelo de entrenamiento para el razonamiento lógico en los niños.

La tercera es lo conclusivo de la Matemática, esto es, las diferentes disciplinas toman conclusiones con base en las manipulaciones matemáticas.

La cuarta es su independencia, esto es, no requiere de equipos costosos a diferencia de las ciencias experimentales. Basta a veces con lápiz y papel, o ni siquiera esto. Arquímedes dibujaba sobre la arena. Leray escribió su matemática siendo prisionero de guerra. A pesar de los regímenes políticos de toda índole, la Matemática continúa evolucionando. Es interesante observar que sus bibliotecas son menos grandes que las de otras disciplinas.

¿Qué significa la palabra Matemática?

Según me comentó mi querido amigo, Arrigo Coen, Mathema significa erudición, manthánein el infinitivo de aprender, el radical mendh significa en pasivo, ciencia, saber. Luego, es lo relativo al aprendizaje. Así que en sentido implícito, Matemática significa: "lo digno de ser aprendido".

¿Qué es la Matemática?

No existe una definición de lo que es la Matemática. Sin embargo se dice que es una colección de ideas y técnicas para resolver problemas que provienen de cualquier disciplina incluyendo a la Matemática misma.

Algunos problemas matemáticos

Recuerden el famoso último teorema de Fermat (problema muy fácil de enunciar y de entender hasta por el hombre de la calle) (el cual sucede al de la ecuación pitagórica $x^2+y^2=z^2$) que dice que la ecuación $x^n+y^n=z^n$ nunca tiene soluciones enteras positivas para cualquier entero positivo n mayor que 2. Excepto para n=2, estas ecuaciones no tienen una interpretación geométrica. Aparentemente este problema no pareciera tener mucha importancia, sin embargo ha tenido una influencia enorme en el desarrollo de la Matemática. Fermat dijo que tenía una demostración pero que no tenía espacio para escribirla. Por más de 300 años, este problema, aparentemente sencillo ha sido el motivo de grandes esfuerzos de muchos matemáticos y es precisamente de éstos esfuerzos que se han creado nuevas técnicas y conceptos, los cuales tienen influencia en muchas áreas de la Matemática.

El problema de los cuatro colores afirma que solamente se requieren 4 colores para iluminar o colorear cualquier mapa del globo terrestre con la condición de que dos países adyacentes deban tener colores diferentes. La solución positiva, más de cien años después, fue obtenida mediante el uso de la computadora, teniendo un impacto muy pequeño en la Matemática. Fue el primer problema no trivial solucionado por la computadora.

En la Matemática, si un problema se resuelve mediante métodos estándar, el problema pierde mucho de su interés. Si no se resuelve mediante los métodos conocidos por mucho tiempo, se convierte en un problema clásico. Un buen problema es aquel que da lugar a nuevas técnicas con gran aplicabilidad a otras áreas.

Las ideas nuevas que constituyen los pasos para obtener la solución de algún problema constituyen el progreso de la Matemática. Los matemáticos sabemos apreciar las técnicas ingeniosas.

¿Qué es la investigación matemática?

Existen aspectos contrastantes y alternativas dentro de la investigación matemática. A continuación veamos algunos.

Existen diferencias entre lo que realiza un matemático puro y uno aplicado aunque existe también una interrelación entre las dos.

Existe una gran variedad de problemas. Si algunos de ellos se pueden resolver mediante argumentos ingeniosos de una manera parecida, entonces decimos que tenemos un método para resolverlos y si éstos son muchos, entonces decimos que tenemos una “teoría matemática”. Así se evoluciona, de una colección de problemas, a una “teoría”, la cual difiere del concepto que de ella se tiene en otras disciplinas científicas.

La Matemática es una actividad humana y por ende hay que poderla transmitir a las generaciones siguientes, por lo cual se organiza sistemáticamente para que los que la estudien lo hagan de la manera menos dolorosa posible. Ésta es la forma básica de lo que es una Teoría Matemática.

Poincaré decía que una casa está hecha de ladrillos pero que los ladrillos por sí solos están lejos de ser una casa. Es decir, los problemas por sí solos están lejos de ser una Teoría Matemática.

¿Cómo se da la innovación en la Matemática?

A diferencia de otras disciplinas científicas, en la Matemática la creación de nuevos métodos o técnicas constituye la innovación, la cual es vital para el progreso de la Matemática.

No se requiere del descubrimiento de antiguos documentos manuscritos, ni del trabajo experimental o de la introducción de nueva tecnología. La innovación se da, entre otras cosas, por la creación de nuevas técnicas.

Por ejemplo, cuando Galois se dio cuenta al trabajar en el problema de la insolubilidad de la ecuación polinomial general de grado al menos 5 que la clave estaba en las simetrías de las cinco soluciones de la ecuación, proveyó los fundamentos de la teoría general de la simetría, la cual es una de las ramas más profundas y de amplio espectro de toda la Matemática, llamada Teoría de Grupos.

También hay innovación interna al tratar de dar cohesión a una teoría matemática, al realizar preguntas adecuadas, las cuales requieren de mucha intuición y compenetración. También puede venir de problemas de otras disciplinas.

Se puede decir que hay progreso matemático cuando existe una aplicación continua de métodos usuales intercalados espectacularmente con nuevos conceptos y problemas.

Un ejemplo: la K-Teoría Algebraica

Lo que voy a mencionar en este ejemplo, no necesariamente será entendible por quienes no son expertos en el área, pero la idea es presentarles una breve panorama de la K-Teoría Algebraica, de cómo fue su creación y sus problemas de frontera.

A pesar de que desde principios del siglo XX era bien conocido que un monoide conmutativo (un conjunto provisto de una ley de composición asociativa con elemento neutro) sin divisores de cero podía considerarse dentro del grupo conmutativo que genera, es hasta 1957 (en que Grothendieck pensara en esto) que comienza propiamente la K-Teoría. Es de ésta misma manera que los enteros negativos se definen a partir del monoide aditivo de los naturales [M-B] y que los números racionales positivos se definen a partir del monoide multiplicativo de los naturales sin el cero.

La idea de Grothendieck [D p.599] fue la de asociarle a un monoide conmutativo M, un grupo conmutativo K(M), único salvo isomorfismo, y un homomorfismo canónico definido de monoides φ:M→K(M) tal que para cualquier grupo conmutativo G, cualquier homomorfismo de monoides f: M→ G se factoriza en forma única como

$$f: M \to K(M) \to G.$$

El grupo de Grothendieck apareció publicado por vez primera en 1958 en un artículo de Borel y Serre [B-S]. Aparte de su uso en el teorema de Riemann-Roch, una de las aplicaciones más conocidas de la construcción de Grothendieck la realizaron en 1959 Atiyah y Hirzebruch. Aplicaron la construcción al monoide aditivo de las clases de isomorfismo de haces vectoriales complejos con espacio base un CW-complejo X.

El grupo de Grothendieck lo denotaron $K^0(X)$. Definieron $K^{-n}(X)$ utilizando la suspensión de X para $n \geq 1$. La periodicidad de Bott muestra que $K^n(X) \approx K^{n+2}(X)$ y fue utilizada para definir $K^n(X)$ para $n\in Z$. Dichos funtores constituyen una teoría de cohomología conocida como la K-Teoría Topológica la cual tuvo aplicaciones importantes, entre otras, el Teorema de Atiyah-Singer y la solución del problema de obtener el máximo número de campos vectoriales linealmente independientes sobre una esfera.

Un resultado de Serre generalizado por Swan en 1962 proporcionó una manera de traducir conceptos topológicos en algebraicos. En efecto, si X es un espacio Hausdorff compacto y C(X) es el anillo de las funciones complejas en X entonces existe una equivalencia entre la categoría de los haces vectoriales B sobre X y la categoría de los módulos proyectivos finitamente generados sobre C(X) dada por $B\to \Gamma(B)$ donde $\Gamma(B)$ denota las secciones del haz vistas como módulo sobre C(X).

En pocas palabras, la categoría de los haces vectoriales sobre X es equivalente a la categoría de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados donde Λ=C(X). De aquí se tiene una definición de $K(\Lambda)$ ó $K_0(\Lambda)$ que tiene sentido para cualquier anillo Λ, como el grupo de Grothendieck de la categoría de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados. Así que $K_0(\Lambda)$ es, entre otras cosas, una herramienta útil para investigar la estructura de los Λ-módulos proyectivos.

Por ejemplo, considere el siguiente problema propuesto por Serre en 1955. Ya se mencionó que sobre un espacio topológico X, es equivalente tener un haz vectorial topológico complejo o un módulo proyectivo finitamente generado sobre el anillo de funciones continuas $C^0(X;\mathcal{C})$, donde un haz trivial corresponde a un módulo libre ($\mathcal{C}$. los números complejos). En particular, cuando $X=\mathcal{C}^n$, todos los haces topológicos son isomorfos al haz trivial por lo que los módulos proyectivos finitamente generados sobre $C^0(\mathcal{C}^n;\mathcal{C})$ son libres. Si ahora tomamos un campo k arbitrario entonces los haces algebraicos sobre k^n, corresponden a los módulos proyectivos finitamente generados sobre el anillo de polinomios $k[t_1,t_2, \cdots t_n]$. El problema de Serre es si, como en el caso de haces topológicos sobre $\mathcal{C}^n$, tendremos que todo haz algebraico sobre k^n es trivial. Es decir, ¿son libres todos los módulos proyectivos finitamente generados sobre $k[t_1,t_2, \cdots t_n]$?

En dicho artículo se introducía la Teoría de Gavillas en la Geometría Algebraica. Los haces vectoriales sobre variedades algebraicas se definían como gavillas localmente libres; los haces triviales correspondían a gavillas libres. El espacio afín A^n_k sobre un campo k es el espectro primo Spec $k[t_1,t_2, \cdots t_n]$. Al ser éste un esquema afín sobre el anillo Spec $k[t_1,t_2, \cdots ,t_n]$, las gavillas localmente libres están dadas por módulos proyectivos finitamente generados sobre Spec $k[t_1,t_2, \cdots t_n]$. Así, los módulos finitamente generados sobre Spec $k[t_1,t_2, \cdots t_n]$ corresponden a haces vectoriales sobre A^n_k. Entonces, el problema de Serre se leía así: ¿es trivial todo haz sobre A^n_k ?

Detrás de esto estaba la idea de que el espacio afín A^n_k debería comportarse como un espacio contráctil en Topología, y por lo tanto debería tener únicamente haces triviales sobre él. Escrita de otra manera, la conjetura de Serre diría: ¿son libres los módulos proyectivos finitamente generados sobre $k[t_1, \cdots ,t_n]$?

Invito al lector a tomar un paseo por la literatura correspondiente para apreciar los bellos paisajes matemáticos que llevaron a probar esta conjetura, finalmente, veinte años después independientemente por Quillen y Suslin. Los intentos por resolver la conjetura de Serre en los años sesenta del siglo pasado dieron lugar al nacimiento de otra área: la K-Teoría Algebraica. Una de las metas de la K-Teoría Algebraica fue la de proporcionar técnicas e ideas para atacar el problema de Serre. A pesar de que la solución final de la conjetura en forma afirmativa no dependió de la K-Teoría Algebraica, no disminuye para nada la gran influencia que tuvo en el enorme desarrollo que ha alcanzado con mayor relevancia que la esperada.

En 1964, Hymann Bass definió el funtor K_1 utilizando el diccionario que relaciona conceptos algebraicos con topológicos. Resultó que dichos grupos eran los mismos que los introducidos por Whitehead. Así se tuvo que $K_1(\Lambda) = GL(\Lambda)/[GL(\Lambda),GL(\Lambda)]$ donde $GL(\Lambda)$ denota el grupo lineal infinito. Por resultados de la Homología de Grupos, $K_1(\Lambda)$ es igual a la homología de $GL(\Lambda)$ con coeficientes enteros $H_1(GL(\Lambda),Z)$. En 1950 Whitehead consideró el grupo $K_1(Z[G])$, donde $Z[G]$ denota el anillo entero de grupos fundamentales G de complejos celulares, el cual poseía aplicaciones topológicas. Un resultado relacionado con esto es el teorema del s-cobordismo.

Hubo varios resultados importantes en los años sesenta teniendo el punto de vista de la K-Teoría Algebraica, entre muchos otros, la generación finita de $K_1(Z[G])$ y los resultados de estabilidad para la solución del problema del subgrupo congruente en 1967 por Bass-Milnor-Serre [B-M-S] para $SL_n(\Lambda)$ con Λ el anillo de enteros en un campo numérico. Este último sentó las bases para un tema aritmético en la K-Teoría Algebraica el cual se ha convertido en uno de sus más importantes aspectos.

Durante los últimos años de la década de los sesenta, uno de los problemas más importantes era el de definir funtores $K_n(\Lambda)$ para $n \in Z$. Este problema estuvo sugerido por analogía con la K-Teoría Topológica.

En 1969 Milnor definió $K_2(\Lambda)$: Considérese el grupo elemental infinito $E(\Lambda)$ generado por las matrices elementales e_{ij}^{Λ} entre las cuales valen ciertas relaciones [M2]. Milnor define el grupo de Steinberg $St(\Lambda)$ como un grupo con generadores x_{ij}^{Λ} sujetos a esas relaciones, y define $K_2(\Lambda)$ como el núcleo del epimorfismo $St(\Lambda) \to E(\Lambda)$.

Kervaire en 1970 prueba que $St(\Lambda)$ resulta ser la extensión central universal de $E(\Lambda)$, y por lo tanto $K_2(\Lambda)$ puede describirse como el multiplicador de Schur del grupo perfecto $E(\Lambda)$. En otras palabras $K_2(\Lambda)=H_2(E(\Lambda),Z)$. $K_2(\Lambda)$ es sumamente difícil de calcular.

En 1969 Matsumoto calculó K_2 de un campo describiéndolo mediante generadores y relaciones que fueron utilizadas por Bass y Tate para describir K_2 de campos numéricos.

La K-Teoría Algebraica es un fenómeno multidisciplinario dentro de la Matemática y para definir los grupos de K-teoría superior necesitamos de la siguiente construcción debida a Quillen:

TEOREMA. Sea X un CW complejo conexo con punto base p. Sea N un subgrupo normal perfecto de $\pi_1(X,p)$. Entonces existe un espacio X^+ y una transformación $f: X \to X^+$ tal que

(i) $\pi_1(f)$ induce un isomorfismo $\pi_1(X^+,p) \cong \pi_1(X,p)/N$;

(ii) para cualquier $\pi_1(X^+,p)$-módulo A, f induce un isomorfismo $H_*(X; f^{-1}A) \cong H_*(X^+,A)$;

(iii) (X^+,f) está determinado, excepto por equivalencia homotópica por (i) y (ii).

Este teorema se conoce como construcción + de Quillen, y fue inspirada por la necesidad de encontrar una interpretación topológica del funtor K_2 de Milnor. La idea de la demostración es la de adjuntar 2-células para aniquilar N y 3-células para neutralizar el efecto de las 2-células en homología.

Quillen en los años setenta definió, para $i \geq 1$, el i-ésimo K-grupo algebraico de Λ como $K_i\Lambda= \pi_i(BGL\Lambda^+)$. Como en los casos i=1,2, K_i es un funtor covariante de la categoría de anillos a la categoría de grupos.

Una de las huellas de avance significativo en la Matemática es el descubrimiento de relaciones inesperadas entre diversas áreas. Quizá uno de los ejemplos más notables de tal avance es el desarrollo de la K-Teoría Algebraica de Quillen en la cual el Álgebra y la Topología se relacionan de una manera nueva y fundamental.

Por un lado, la K-Teoría Algebraica introduce métodos topológicos para definir invariantes algebraicos, tales como los K-grupos de anillos de orden superior. Por otro lado, proporciona una forma de traducir conceptos algebraicos en conceptos topológicos. La K-Teoría Algebraica estudia las propiedades de los grupos $K_i(\Lambda)$, construidos a partir de un anillo Λ.

Uno de los problemas más importantes en la K-Teoría Algebraica es el cálculo de los grupos K_i para diversos anillos Λ, pero, a pesar de los esfuerzos de destacados matemáticos como Bass, Milnor, Karoubi, Quillen, Weibel, Loday, Soulé, Snaith, únicamente se conoce un número muy reducido de ellos.

Veamos algunos:

Bass demostró en 1968 que $K_1Z \cong Z/2$ y que $K_1(Z/p^2)=Z\oplus Z/p\text{-}1$, p primo diferente de 2.

Milnor demostró en 1971 que $K_2Z \cong Z/2$ y que $K_2(Z/p^2) = 0$ para un primo p diferente de 2.

En 1972 Quillen calculó la K-teoría algebraica de un campo finito.

Lee y Sczarba encontraron en 1976 que $K_3Z \cong Z/48$.

Sea R el anillo de enteros de un campo numérico e I un ideal no trivial. El calcular $K_i(R/I)$ para anillos finitos es un problema abierto para $i \geq 3$ [J-S]. Resultados parciales han sido obtenidos (i) por Evens-Friedlander [E-F], y (ii) por Aisbett, Lluis-Puebla, Snaith y Soulé.

En mi Memoria de la American Mathematical Society junto con otros artículos míos aparecen calculados K_3 de los números duales y de los enteros módulo n.

En mi Lecture Notes de Springer Verlag el lector encontrará un panorama de la K-Teoría de orden superior donde se aborda uno de los más importantes problemas abiertos en la K-Teoría Algebraica, a saber, el cálculo de la K-Teoría de los números enteros.

El cálculo de la K-teoría algebraica aún de anillos bien conocidos es extraordinariamente difícil. El cálculo de KiZ ha sido todo un reto desde hace más de treinta años. Weibel obtuvo en 1997 la estructura de KiZ.

En mi libro Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica se estudia la relación entre la K-Teoría y la Cohomología de Grupos y constituye una introducción a estas áreas.

En mi libro Álgebra Lineal, Álgebra Multilineal y K-Teoría Algebraica Clásica se introducen los conceptos elementales de esta última cuya parte clásica es parte del Álgebra Lineal General. Ya apareció hace unos meses la Segunda Edición la cual pueden acceder libremente a través de la página de la Sociedad Matemática Mexicana.

En 1986, se le dio a la K-Teoría Algebraica el número 19 del Índice de Clasificación de la Matemática convirtiéndose en una de las ramas más recientes de la Matemática.

Los resultados más recientes e importantes en esta rama de la Matemática son la demostración de la Conjetura de Milnor por Vladimir Voevodsky la cual establece, para un campo de característica distinta de 2, la existencia de un isomorfismo de la K-teoría de Milnor tensor Z módulo dos con la cohomología de Galois del campo con coeficientes en Z módulo 2.

El caso para p distinto de dos se conoce como la Conjetura de Bloch-Kato y ha sido probada por Voevodsky y Rost.

Un nuevo resultado es la verificación de que para n=2 mod 4 los grupos finitos $K_n(Z)$ son cíclicos para n<20,000.

Es de notarse que los grandes creadores de la K-Teoría Algebraica han sido galardonados con la Medalla Fields, a saber, Serre en 1954, Milnor en 1962, Grothendieck en 1966, Atiyah en 1966, Quillen en 1978, Connes en 1982 y Voevodsky en 2002.

Para quienes estén interesados en la K-Teoría Algebraica les comento que para adentrarse en ella además de estudiar el material de mis textos anteriormente mencionados hay que realizar estudios en Teoría de Homotopía, Topología Algebraica, Teoría de Categorías y Geometría Algebraica entre otros.

La Matemática, una Bella Arte

Como lo he expresado en múltiples ocasiones, la Matemática es una Bella Arte y una Ciencia. Para los matemáticos, la belleza y la verdad tienen igual estima. Tenemos mucho aprecio por un argumento hermoso, esto es, un argumento que conlleva elegancia en el estilo, economía de esfuerzo, claridad de pensamiento, perfección en el detalle y en la forma de acertar una deducción contundente y convincentemente. Los matemáticos nos dedicamos a un área u otra dependiendo en qué tan bella nos parece una con relación a otra. Buscamos métodos elegantes y evitamos argumentos feos.

Características estéticas de la Matemática

Hay varias características estéticas de la Matemática. La universalidad, en el sentido de que casi cualquier rama del conocimiento posee aspectos que se pueden analizar matemáticamente. El desarrollo de argumentos simples y concisos es absolutamente indispensable para el progreso de la Matemática. La selección y formulación de problemas son un arte que depende de la intuición del matemático. Aquí, los aspectos estéticos juegan un papel muy importante.

Poincaré escribe a principios del siglo XX, que una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos, sino silogismos colocados con cierto orden y que el orden en que son colocados es mucho más importante que los silogismos por sí solos. Comenta que no tiene miedo de que alguno de éstos se le olvide pues cada uno de ellos tomará su lugar en el arreglo sin el menor esfuerzo.

También describe el proceso de creación: primero se realiza un trabajo consciente acerca del problema, después deja madurar esas ideas en el subconsciente, luego aparece la solución, quizás cuando menos se espera, y finalmente ésta se escribe.

A manera de broma, pareciera que Poincaré creaba Matemática al subirse o bajarse de un tranvía. Hadamard recomendaba tomarse dos baños de agua caliente para estimular la investigación matemática. Muchos matemáticos beben café, transformándolo en teoremas. También he escuchado que la Matemática se hace caminando, es decir cuando se dejan las ideas en el "inconsciente" y de repente ocurre una "feliz idea", la cual es, quizá, una serie de conexiones neuronales que tienen lugar en el tiempo las cuales se logran mejor cuando no interviene un acto consciente demasiado fuerte que las impida.

Formalismo y rigor matemáticos

Hay una distinción entre formalismo y rigor matemáticos:

En la Matemática formal, uno crea matemática sin preguntarse demasiado acerca del significado mientras ésta dé el resultado correcto. Uno sigue adelante sin preocuparse demasiado por el rigor matemático esperando que en el futuro éste sea provisto.

La Matemática, hay que insistirlo para no perderlo de vista, es esencialmente una actividad humana y nuestra meta no solamente es inventarla sino trasmitirla. Así, el rigor matemático debe existir. Si no se tienen bases sólidas, cualquier construcción basada en ellas podría caer.

Existen matemáticos que se especializan lo más profundamente posible en un área o campo y otros que adquieren una gran cultura matemática, tan amplia como sea posible. Los dos tipos de matemáticos son necesarios.

Sin embargo, muchos recomendamos a los jóvenes que comiencen por obtener una cultura matemática, lo más amplia posible y luego sumergirse en un tema. Esto es debido a que la esencia de la Matemática es la de juntar campos aparentemente disímiles. Después de todo, la Matemática es el grado máximo de abstracción el cual tiene aplicación en toda disciplina que se precie de llamar ciencia.

¿Cómo trabajan los matemáticos?

Existen matemáticos que trabajan individualmente y otros que lo hacen en un pequeño o gran grupo. Es muy difícil el trabajar solo, a menudo uno solo no ve una trivialidad que lo detiene por mucho tiempo y la cual es resuelta inmediatamente por un colega dentro del grupo. Pero a veces, sucede al revés, no siempre tres cabezas piensan más que una. A veces, la interacción con colegas enriquece tanto a la Matemática como a los matemáticos y se encuentran esas interrelaciones de las cuales hablaba anteriormente entre áreas aparentemente disímiles.

A veces la colaboración entre matemáticos es enriquecedora y hace de la investigación matemática, la cual es muy ardua o difícil, una experiencia más humana y social, aunque a veces esto no se puede por no haber colegas de la misma especialidad cerca o por características de personalidad de cada matemático. El trabajar en grupo no exime del arduo trabajo individual de meditar o pensar en Matemática.

¿Cuáles opciones de áreas tienen los jóvenes matemáticos?

Para los jóvenes que ingresan al apasionante mundo de la creación matemática existen dos posibilidades. O ingresan a un área de investigación de moda o de peso a la cual se considera relevante o crean su propia área. Las dos posibilidades existen con sus ventajas y desventajas. A menudo, dentro de una de las áreas de la corriente que se considera principal, los problemas son muy difíciles y ya grandes matemáticos han realizado lo que han podido y sólo restan temas demasiado difíciles o irresolubles por el momento o por siglos. Mientras que en un área nueva a menudo hay mucho por hacer y no es tan ardua la labor matemática. Pero también se paga el precio de que sea intrascendente todo lo realizado.

¿Cuáles son los tipos de matemáticos en general?

Coexisten dos tipos de matemáticos, los que utilizan la fuerza bruta y los elegantes. Esto es, quienes utilizan métodos o técnicas aplastantes que los conducen a la resolución del problema y quienes con pocos argumentos colocados adecuadamente lo obtienen sorpresivamente de manera brillante. A veces un mismo matemático puede actuar de las dos formas en distintas ocasiones.

Sin embargo, la transmisión de la Matemática es mucho más apreciada, por la manera que funciona nuestro cerebro, cuando se hace de manera elegante y simple, es decir, de forma artística. Así, la elegancia matemática es muy importante. Ésta se logra, en general, (no en la fuente primaria de la investigación sino) después de haber pasado por muchas mentes matemáticas brillantes.

¿Cómo se está realizando la transmisión de la Matemática actualmente?

En cuanto a la transmisión de la matemática de frontera, ésta se realiza después de un tiempo, debido a lo expresado anteriormente, cada vez más a niveles de gente más joven. Matemática muy difícil se ha compactado y presentado elegantemente facilitando su aprendizaje. Esta es la manera más eficaz de transmitir Matemática.

Así, hay varios tipos de creación matemática y de matemáticos, todos indispensables.

Hay una inmensidad de matemática creada durante unos cuantos siglos. Sin embargo, a principios del siglo 20 solamente unos cuantos grandes matemáticos podían decir que abarcaban una buena parte de la totalidad de ella. Hoy en día es casi imposible que un matemático abarque ni siquiera su propia área de estudio. ¿Querrá decir esto que el gran edificio de la Matemática nos aplastará? Sucede que así como la especialización es inevitable, el desarrollo de nuevos conceptos abstractos absorben otros creados en el pasado. Estas nuevas creaciones son tan importantes como las soluciones de los problemas difíciles o desarrollos de nuevas técnicas.

¿Cómo se selecciona un problema para trabajarlo cuando se comienza a realizar investigación?

Los estudiantes de doctorado en matemática, prácticamente no pueden elegir el problema que les asignará su asesor. Generalmente es el asesor, quien a veces vislumbra la técnica adecuada, el que le pone un problema para que lo resuelva.

Algunos matemáticos que ya realizan investigación por sí solos realizan investigación sobre un tema el cual se da, a veces, por sí solo. Este surge de la comunicación con otros colegas, de la curiosidad, de meditar o de moverse por la literatura matemática adecuadamente. Lo importante es que se tenga la convicción de entender la Matemática.

¿Qué se conoce como Matemática Aplicada?

La actividad en la cual la Matemática encuentra aplicaciones fuera de su propio campo se llama Matemática Aplicada. La Matemática Aplicada es automáticamente multidisciplinaria, e ideal y probablemente debería realizarse por alguien cuyo interés primario no es la Matemática. Sin embargo encontramos que es mucho menos difícil que una persona que adquiere una formación matemática se adentre en otras disciplinas. Esta es una gran ventaja para los estudiantes y egresados de una licenciatura de Matemática.

Se dice que la finalidad propia de las aplicaciones de la matemática es la de que la Matemática sea automatizada. Por ejemplo, el descenso del hombre en la luna requirió de muchos cálculos pero que estaban automatizados.

Tenemos un diagrama con el MUNDO FÍSICO, luego EL MUNDO MODELADO CON MATEMÁTICA, luego LAS TRANSFORMACIONES Y OPERACIONES MATEMÁTICAS y finalmente LAS APLICACIONES AL MUNDO FÍSICO.

Las dos de en medio se convierten en un proceso automatizado. Mientras más exitosa y completa sea una aplicación, más automática y programada se debe convertir.

Un ejemplo: la Teoría Matemática de la Música

Comenzó hace más dos décadas. Una de las principales metas de la Teoría Matemática de la Música es la de desarrollar un marco científico para la Musicología. Este marco posee como fundamento a campos científicos establecidos. Incluye un lenguaje formal para los objetos y relaciones musicales y musicológicas.

"The Topos of Music" es un libro de Guerino Mazzola del cual tengo el honor de ser uno de los colaboradores. Podemos apreciar que el mismo título de la obra, "The Topos of Music", posee un doble sentido. Por un lado está la palabra griega topos, que significa lugar y que sugiere la ubicación del concepto de la Música como un tópico, en el sentido de Aristóteles y Kant. Por otro lado, se hace referencia a la teoría matemática Topos que sirve para reflejar el sistema de signos musicales, esto es, la Música en su faceta de un sistema abstracto cuya estructura puede permanecer escondida sin un marco adecuado de comprensión. Este doble significado expresa, de hecho, la intención de unificar una profundización filosófica con la precisión de la Matemática, en torno a la Musicología. La Música está enraizada con realidades físicas, psicológicas y semióticas. Pero la descripción formal de las instancias musicales corresponde al formalismo matemático.

La Teoría Matemática de la Música está basada en las Teorías de Módulos y Categorías, en la Topología Algebraica y Combinatoria, en la Geometría Algebraica, Teoría de Representaciones. Su propósito es el de describir las estructuras musicales. La filosofía detrás de ella es la de comprender los aspectos de la Música que están sujetos al raciocinio de la misma manera en que la Física puede hacerlo de los fenómenos propios del trabajo científico.

Esta teoría está basada: en un lenguaje adecuado para manejar los conceptos relevantes de las estructuras musicales, en un conjunto de postulados o teoremas con respecto a las estructuras musicales sujetas a las condiciones definidas y, en la funcionalidad para la composición y el análisis con o sin computadora.

Mazzola, ya en su artículo "Status Quo 2000", (el cual hemos apreciado mucho que fuese presentado en México durante una exposición plenaria espléndida en Saltillo), explicó porqué el acercamiento mediante su modelo teórico geométrico de los años ochenta evolucionó a un marco que es apropiado para muchos problemas musicales. Ese nuevo marco está basado en Matemática más sofisticada como la Teoría de Topos.

La Música es una creación central de la vida y pensamiento del ser humano. Que actúa en otra capa de la realidad que la Física. Creemos que el intento de comprender o de componer una obra de gran envergadura en la Música es tan importante y difícil como el intento de unificar la gravitación, el electromagnetismo, las fuerzas débiles y fuertes. De seguro, las ambiciones son comparables, y por lo tanto, las herramientas deben de ser comparables. La Matemática provee una base científica para comprender la Música y la Musicología y para que esta última pueda considerarse una ciencia, no una rama de la literatura poética común y corriente.

Perspectivas en la Teoría Matemática de la Música

"Perspectivas en la Teoría Matemática y Computacional de la Música". Éste es el libro más reciente el cual editamos Guerino Mazzola, Thomas Noll y yo. Está publicado en tres versiones (como deben de hacerse ya las publicaciones). La versión en línea, la cual es gratuita; la versión en papel y la versión en CD (éstas dos últimas obviamente tienen un costo para quien las desea así). Se puede consultar gratuitamente en www.epos.uni-osnabrueck.de/books/m/ma_nl004/pages/.

¿Qué hay acerca de la Matemática y la Computación?

La revolución industrial se medía en siglos, la revolución de la computadora se mide en décadas o lustros. En los siglos 18 y 19, la mano de obra fue reemplazada por las máquinas y aparentemente el siglo 20 se caracterizó por el reemplazo del cerebro por la computadora. En un principio, la ciencia del cómputo creció conjuntamente con la Matemática. Turing y von Neumann son algunos de sus pioneros. Aún ahora, la Matemática es la ciencia más cercana a la del cómputo. La Lógica Matemática proporcionó una base para la computación, refiriéndonos al software. Sin embargo, es el chip de silicón el que permitió la revolución.

Los matemáticos hemos estado interesados siempre en el concepto de "demostración", es decir, en la rigurosa deducción de varias conclusiones a partir de ciertas suposiciones. Hay que dar instrucciones precisas para que funcione un ordenador o computadora y la Lógica Matemática es el marco adecuado para formularlas.

Relacionado con la idea de demostración está la de algoritmo, es decir, la de un método para hacer algo, en particular, para resolver un problema. Éstos son requeridos para que la computadora realice tal o cual cosa. Una rama de la Matemática se dedica al estudio de los algoritmos, en particular los rápidos, a saber, la Teoría de Complejidad. Así que las Teorías de las Demostraciones y Complejidad son dos tipos de matemática creadas por las necesidades del cómputo. Como las computadoras usan Z2, están relacionadas con la Matemática Discreta ejemplificada por el Álgebra. Atiyah menciona que algunas personas argumentan por esto el que debe de modificarse drásticamente la enseñanza de la Matemática quitando el énfasis en el Cálculo que a menudo se realiza desde hace mucho tiempo.

¿Cómo ha ayudado la computadora a la investigación matemática?

La computadora proporciona una manera muy rápida de obtener soluciones numéricas a distintos problemas. En la Matemática Aplicada un problema tiene una solución satisfactoria si se puede proporcionar un algoritmo en la computadora de tal manera que se tengan disponibles las soluciones numéricas. Pero no todo son números, por ejemplo, las expresiones de lógica no representan números. Las expresiones simbólicas ya han sido consideradas en la computadora y son manipulables. Como ejemplo de esto está la determinación de todos los grupos finitos simples la cual se llevó al cabo utilizando poderosas computadoras.

¿Cuáles son las etapas para generar nuevos resultados en la Matemática y cuál es la utilidad de la computadora en ésta?

En la Matemática, hay varias etapas para generar nuevos resultados. Identificar hechos relevantes, su arreglo en patrones que poseen un significado, la posible extracción de una fórmula, el corroborar la fórmula y hasta el final la demostración. La computadora puede ser útil en las primeras etapas. Es lógico que se trate de probar que ciertas conjeturas son válidas simplemente sustituyendo valores pero cuyos cálculos resultarían demasiado largos y tediosos de realizarlos a mano. Ahora podemos hasta ver los resultados en forma gráfica en algunas ocasiones. Antes se tenían que realizar a mano, tal como los realizó Euler o Gauss.

¿Será la computadora un sustituto para el pensamiento humano o para la Matemática?

Atiyah comenta que sin duda, el problema más importante del siglo XXI es el de comprender cómo funciona el pensamiento humano. Este proyecto obviamente requerirá de matemáticos, entre otros muchos especialistas de otras disciplinas científicas.

Existe una solución del famoso problema de los cuatro colores, el cual establece que es suficiente el colorear con cuatro colores cualquier mapa del planeta con la condición de que países adyacentes sean coloreados de manera diferente. Este problema data del siglo 19 y en el 20 se resolvió utilizando una computadora que comprobó cientos de casos. Fue un gran triunfo pero a la vez una gran desilusión desde el punto de vista estético, además de que no se crearon nuevas técnicas a partir de la demostración. Se usó la fuerza bruta. ¿Será así en el futuro? pregunta Atiyah.

¿Cuál es la naturaleza y propósito de la Matemática y de la Ciencia?

La respuesta usual es la de que el ser humano intenta comprender o entender el mundo físico y eventualmente controlarlo. Pero qué significa comprender o entender. Atiyah duda que entendamos la demostración del teorema de los 4 colores. Las demostraciones por computadora alteran el concepto de demostración publicada. Lo que sucede es que existe una diferencia fundamental entre un experimento diseñado para encontrar hechos acerca del mundo natural y cálculos de computadora que conciernen con un problema puramente matemático propuesto por el hombre. Uno es externo y el otro es interno.

Una de las características más importantes de la Matemática es su arquitectura o diseño global, esto es, la forma elegante y profunda como las ideas abstractas están colocadas. La piedra angular de la buena matemática es la economía y simplicidad del pensamiento. Aunque uno de sus objetivos es el de proporcionar soluciones explícitas, a veces de carácter numérico, los desarrollos teóricos evolucionan esencialmente para evitar largos cálculos. Ese ahorro o flojera conduce a encontrar ideas o métodos alternativos para ese fin. Las computadoras carecen de ellos. Estas ideas o métodos son los necesarios para avanzar un poco.

Dicho de otra manera, dice Atiyah, la Matemática es una (Bella, digo yo) Arte que evita la fuerza bruta, mediante el desarrollo de conceptos y técnicas que nos permiten ligereza. Se dice que si las computadoras hubieran estado en el siglo quince, la Matemática actual sería una mala imitación de sí misma. El peligro real es el de dejar la Matemática a las computadoras. Las debemos de tener simplemente como ayudantes.

Las industrias tradicionales han declinado y las relacionadas con el cómputo han crecido. Esto hace que los empleos estén ligados a las computadoras. Este tipo de empleos alteran las actitudes y expectativas de las generaciones jóvenes. La Matemática está ligada a esto y a las escuelas, universidades, maestros y alumnos. El peligro para la Matemática está en que los nuevos grandes talentos se encaminen a la computación en lugar de a la Matemática. Pero esto puede que no suceda. Los verdaderos matemáticos están motivados por la belleza y poder de la Matemática y no por el dinero. Para aquellos que creen que la computadora puede realizar todo el trabajo oprimiendo un botón, hay que decirles que tienen todavía que enseñar a los niños a pensar cuál botón oprimir.

¿Y acerca del aprendizaje de la Matemática?

Desde el mi punto de vista, qué bien que se está preocupado por la actualización de los maestros, por tener mejores programas de estudio, mejores textos y métodos pedagógicos. Pero quiero llamar la atención una vez más, como lo hice en el Foro Permanente en la Reunión de Trabajo sobre Enseñanza de las Ciencias y Difusión y Divulgación de la Ciencia y la Tecnología, en Morelia, Michoacán, el 18 y 19 de enero del 2001. Ahí expuse que se está olvidando el ente más importante de todos, quien es el que va a aprender, el alumno.

Recuerdo a Hymann Bass (presidente de la American Mathematical Society en 2001-2002 y del ICMI, quien atendió mi invitación a presidir conmigo cuando yo era presidente de la Sociedad Matemática Mexicana, la inauguración del V Joint Meeting SMM-AMS en el 2001 en Morelia) con quien pasé largas horas dialogando. Le expuse acerca de la importancia de poner atención a quien está del otro lado del salón, el alumno.

Conversaba con él en ese entonces acerca de que, aún cuando se tuviera como profesor en un aula a un Premio Abel o uno Fields, se tuviera el mejor programa y el mejor texto, si el alumno de primaria, secundaria, preparatoria o licenciatura no desea estudiar o aprender, de nada sirve el profesor, el programa y el libro de texto.

Les cuento que de esta conversación y como vio que en la Sociedad Matemática Mexicana éramos muy buenos para organizar reuniones como el V Joint Meeting, me llegó la propuesta de organizar el ICME en México. Yo turné la propuesta al Comité de Educación de la SMM y ellos estuvieron muy contentos en que se realizara en México, para lo cual se respondió que sí se aceptaba la propuesta. Siete años después, en el 2008, se llevó al cabo el ICME en Monterrey.

Hay varios puntos interesantes a considerar. Les diré algunos:

1.- Es fundamental hacerles ver a los alumnos el porqué asisten a la escuela y porqué estudian Matemática en particular. Explicar esto ayudaría muchísimo a que el alumno tenga interés por lo que esta enseñándose en la escuela. El que no sabe porqué y para qué realiza una actividad nunca tendrá la valoración de lo que hace.

Una orientación vocacional para el nivel medio sería de lo más útil, pues los alumnos llegan a una licenciatura sin saber de qué se trata la disciplina y realmente a qué se dedican en la misma.

En el nivel profesional, un buen expositor debe de explicarles lo mejor posible acerca de la disciplina que se estudia así como de quienes la ejercen, como reafirmación.

Parte de lo que hay que decirles reiteradamente a los alumnos es que van a estudiar lo que la raza humana ha realizado en toda su existencia para así poder convivir lo mejor posible en sociedad. Hay que hacerles ver que desafortunadamente la cultura no viene dada por herencia genética y que si un bebé es dejado en una isla sin aprender lo que han hecho algunos de sus antepasados, regresa automáticamente a la edad de piedra.

Dicho en otras palabras hay que contextualizar e historizar lo que se está ofreciendo al alumno.

2.- Independientemente de las teorías pedagógicas hay que poner un énfasis muy grande en los buenos hábitos de estudio. Hacer comprender a los alumnos cómo funciona nuestro cerebro (de una manera apropiada para cada nivel de estudios) haciendo mucho énfasis en estudiar todos los días un poco (pues las conexiones neuronales se realizan como ya se sabe). Es decir, el que un alumno aprenda no depende exclusivamente de un maestro. Por ejemplo, si los alumnos estudian la noche anterior a un examen de Matemática, quiere decir que no tienen idea de cómo funciona su cerebro. Aquí hace falta la explicación, de entrada, como el instructivo que debería de traer bajo el brazo cada niño explicando adecuadamente, a su nivel, cómo puede aprender. Hemos visto que las conexiones neuronales requieren de cierto tiempo para realizarse. El que desconoce cómo funciona su propio cuerpo está destinado a cometer barbaridades inmensas con el.

Para que el aprendizaje sea significativo, el alumno debe construir el conocimiento, lo cual implica tener una posición activa en el proceso de aprendizaje en el cual cada vez se realizan análisis y síntesis cada vez mayor dificultad. En este proceso, el profesor es un facilitador que ayuda al alumno a acercase al objeto de conocimiento.

3.- En todos los niveles, pero especialmente en el nivel básico los bajísimos salarios de los maestros impiden que estos preparen adecuadamente sus clases. Tienen que buscar otro trabajo para completar su ingreso o dar varios turnos. Si el Estado se ha atribuido la función de impartir Educación, tiene el poder y la obligación de establecer salarios dignos. Por lo tanto, lo primero que hay que hacer es reconocer la importancia debida de la enseñanza en general y de la Matemática en particular y pagarles bien a los maestros. Esto permitiría a los maestros de todos los niveles preparar bien sus clases, documentarse y leer aún más para poder tener una superación y transmitir ese gusto y pasión por la Matemática. La mejor inversión que puede realizar un pueblo es en la Educación, la cual crea Capital Humano y este crea Capital Físico y no al revés.

4.- Aunque no se tenga un maestro adecuadamente preparado, este tiene la obligación de seguir un programa con un texto. Más aún si el texto es único y “oficial”. Hay que hacer que los alumnos lean el texto, que lo entiendan y hacerles ver que tienen la responsabilidad de aprender todo el temario correspondiente. Los alumnos tienen derechos y obligaciones, todo mundo reclama los derechos mas no las obligaciones, en particular la obligación de estudiar y aprender. Hay alumnos quienes vean esto como una obligación y otros como la gran oportunidad de disfrutar del conocimiento que ha creado el Ser Humano, becados por el pueblo que paga impuestos y por sus padres que les dan de comer.

En resumen: si consideráramos al alumno como un objeto inerte, receptáculo de los conocimientos que vierte el profesor, el único responsable del proceso de enseñanza-aprendizaje sería este último, pero si consideramos al alumno como un sujeto activo que construye su relación con el objeto de conocimiento ayudado por el profesor, entonces ambos tienen responsabilidad en el proceso: la del profesor sería facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje y la del alumno comportarse en forma activa, realizar análisis y síntesis sucesivos que le permitan construir su conocimiento.

He mencionado que la Matemática, es esencialmente una actividad humana y nuestra meta no solamente es inventarla sino trasmitirla. Para mí, la enseñanza ideal debería ser uno a uno. Es decir, un profesor y un solo alumno. Dirigir al estudiante personalmente, como si se tratara de una clase individual de un instrumento musical. El equivalente para un estudiante de un instrumento musical, del método estándar actual, es como si llegara el profesor, tocara en ese instrumento la obra x de algún compositor y luego les dijera a sus alumnos que la semana próxima tienen el examen donde deben de tocarla como él. Pero en un sistema donde hay muchísimos estudiantes y pocos profesores, no hay de otra mas que la educación masiva, y sálvese quien pueda. A pesar de esto, hay que hacer lo más que se pueda para que los alumnos tengan éxito en este fascinante periodo de su vida. Para mí, lo ideal sería imitar todas las características que se tienen en la enseñanza de un instrumento musical en lo posible, es formativa, informativa, enriquecedora, placentera, etc.

¿Y bien, qué hay de la resolución de problemas?

Hemos visto que cierto tipo de problemas dan lugar a ramas de la Matemática.

Hemos visto que hay problemas muy fáciles de enunciar y de entender hasta por el hombre de la calle. Que hay problemas, aparentemente sencillos, los cuales han sido el motivo de grandes esfuerzos de muchos matemáticos y es precisamente de éstos esfuerzos que se han creado nuevas técnicas y conceptos, los cuales tienen influencia en muchas áreas de la Matemática.

También hemos visto que un buen problema es aquel que da lugar a nuevas técnicas con gran aplicabilidad a otras áreas y que las ideas nuevas que constituyen los pasos para obtener la solución de algún problema constituyen el progreso de la Matemática.

Existe una gran variedad de problemas. Si algunos de ellos se pueden resolver mediante argumentos ingeniosos de una manera parecida, entonces decimos que tenemos un método para resolverlos y si éstos son muchos, entonces decimos que tenemos una “teoría matemática”. Así se evoluciona, de una colección de problemas, a una “teoría”, la cual difiere del concepto que de ella se tiene en otras disciplinas científicas.

Poincaré decía que una casa está hecha de ladrillos pero que los ladrillos por sí solos están lejos de ser una casa. Es decir, los problemas por sí solos están lejos de ser una Teoría Matemática.

A diferencia de otras disciplinas científicas, en la Matemática la creación de nuevos métodos o técnicas constituye la innovación, la cual es vital para el progreso de la Matemática.

Se puede decir que hay progreso matemático cuando existe una aplicación continua de métodos usuales intercalados espectacularmente con nuevos conceptos y problemas.

Una de las huellas de avance significativo en la Matemática es el descubrimiento de relaciones inesperadas entre diversas áreas.

La selección y formulación de problemas son un arte que depende de la intuición del matemático. Aquí, los aspectos estéticos juegan un papel muy importante.

Recordemos que los estudiantes de doctorado en matemática, prácticamente no pueden elegir el problema que les asignará su asesor. Generalmente es el asesor, quien a veces vislumbra la técnica adecuada, el que le pone un problema para que lo resuelva.

Algunos matemáticos que ya realizan investigación por sí solos realizan investigación sobre un tema el cual se da, a veces, por sí solo. Este surge de la comunicación con otros colegas, de la curiosidad, de meditar o de moverse por la literatura matemática adecuadamente. Lo importante es que se tenga la convicción de entender la Matemática.

Mucha Matemática se crea por simple curiosidad. Pero esta simple curiosidad sólo la poseen los grandes matemáticos. Uno de los problemas más difíciles para un matemático principiante (o no tan principiante) es el de encontrar un problema. A menudo sucede que casi toda la emoción de la creación y penetración está concentrada en formular la pregunta adecuada. Podría decirse que esto es más de la mitad del trabajo y a menudo la que requiere de inspiración. Esta es una gran diferencia con la investigación en otras áreas del conocimiento y es precisamente por esto el que la investigación matemática es extremadamente difícil. La respuesta puede ser también difícil, puede requerir mucho ingenio, puede utilizar técnicas conocidas y en el mejor de los casos requiere de la invención de nuevas técnicas. El matemático no procede como un detective para encontrar la solución de su problema. No es una computadora de deducciones, sino procede mediante experimentación (que no utiliza tubos de ensayo o equipos costosos), mediante la inducción y, si hay suerte, inspiración.

También hemos mencionado que el problema de los cuatro colores cuya solución positiva, más de cien años después, fue obtenida mediante el uso de la computadora, teniendo un impacto muy pequeño en la Matemática. Fue el primer problema no trivial solucionado por la computadora. Es decir, existe una solución del famoso problema de los cuatro colores. Este problema data del siglo 19 y en el 20 se resolvió utilizando una computadora que comprobó cientos de casos. Fue un gran triunfo pero a la vez una gran desilusión desde el punto de vista estético, además de que no se crearon nuevas técnicas a partir de la demostración. Se usó la fuerza bruta.

Los matemáticos están motivados por la belleza y poder de la Matemática.

Con respecto a la enseñanza, en general no es vital tal o cual método. Existen enfoques diversos y para algunos un método funcionará mejor que otros. Sin embargo, lo que sí tienen que hacer todos los estudiosos de la Matemática es meditar, pensar, digerir, etc. la matemática que se les está transmitiendo y si lo que desean es crear nueva matemática tienen que llegar a la cima del conocimiento en el área que están trabajando. Una forma de hacer esto es resolver los problemas asignados por el profesor y así “descubrir” matemática. Para “inventarla”, requieren de llegar a la cima del conocimiento en el área.

Muchos problemas así asignados se resuelven con las técnicas aprendidas en la parte teórica y otros requerirán de un ingenio mayor para resolverlos. El apreciar la técnica que otros matemáticos ha creado y asimilarla para utilizarla cuando sea propicio es fundamental.

Una de las consecuencias de la enseñanza adecuada de la Matemática a todo nivel es que el alumno tiene la oportunidad de aprender a razonar, cosa que no tienen con otras materias. La Geometría se convirtió y sigue utilizándose como un modelo de entrenamiento para el razonamiento lógico en los niños.

Los egresados de una licenciatura de Matemática pueden y deben encontrar trabajo como cualquier otro egresado de una licenciatura, es cosa de hacerles ver a quienes contratan personal de las enormes ventajas que tendrían al contratar matemáticos, pues sobretodo, una de esas ventajas es de mucho valor para quienes no tienen miedo de contratar a personas que han realizado un entrenamiento en el acto de pensar y que poseen capacidad de aprender.

¿Qué ha sucedido en la Matemática en los siglos anteriores?

Atiyah menciona que los siglos XVIII y XIX podría llamárseles los de la Matemática Clásica. Al final del siglo XIX Poincaré y Hilbert eran las figuras dominantes, podrían considerarse discípulos de Newton y Leibniz, respectivamente.

Poincaré pensaba más en términos geométricos o topológicos y Hilbert más en el lado del formalismo y axiomatización. Poincaré, quien realizó trabajo pionero en la Topología predijo que ésta sería un ingrediente importante de la Matemática del siglo XX (algunos dicen que si se tuviera que nombrar de alguna manera al siglo XX sería como el siglo de la Topología). Mientras, Hilbert propuso su famosa lista de problemas los cuales no contenían los topológicos y no pudo predecir, según Atiyah, el alcance de la Topología en el siglo XX.

La primera mitad del siglo XX la denomina la era de la especilización, donde la formalización tipo Hilbert y Bourbaki tiene lugar. La segunda mitad del siglo XX la denomina la era de la unificación, donde las áreas se traslapan y las técnicas se implementan entre ellas. Para el siglo XXI Atiyah propone llamarlo el siglo de la matemática cuántica o de la dimensión infinita, entendiendo por esto el entender adecuadamente el análisis, la geometría, la topología y el álgebra de varios espacios de funciones no lineales de tal manera que se obtengan demostraciones rigurosas de cosas hermosas que han estado especulando los físicos entre otras importantes (como la Geometría Diferencial No Conmutativa de Alain Connes).

¿Cuáles paradigmas han sucedido en la Matemática y en otras disciplinas incluyendo la Musicología?

Guerino Mazzola menciona en su libro "The Topos of Music" tres paradigmas mayores de la Matemática y Musicología que han ocurrido durante los 150 años que han sido paralelos en la evolución de ambas y la creciente presencia de la Matemática en la Música.

Estos son: las estructuras globales, las simetrías y la Filosofía de Yoneda.

La primera quiere decir, en palabras, que las estructuras localmente triviales se pueden juntar en configuraciones estéticas válidas si éstas se pegan de una manera no trivial. La Física Clásica concierne con los fenómenos locales y luego hay que estudiar el comportamiento físico en gran escala. La Física concierne realmente con adivinar el futuro cuando se va de lo local a lo global.

La segunda, las simetrías y (los fractales) son utilizadas en la composición, aparecen también en la Naturaleza y en la Matemática juegan un papel crucial como también en la Física.

En cuanto a la tercera: la Filosofía de Yoneda, en palabras dice que, para comprender un objeto, de vueltas alrededor de él. Esto quiere decir, entendimiento mediante el cambio de perspectivas. En Matemática, este Lema de Yoneda tiene importantes aplicaciones en el Álgebra Homológica, en la Topología Algebraica y en Geometría Algebraica solamente para mencionar algunas. Dice que un objeto matemático puede clasificarse salvo isomorfismo por su funtor. En Música, la partitura es solamente su primera vista y junto con todas sus interpretaciones constituyen su identidad. ¡Qué maravilloso punto de vista para ambos intérprete y audiencia. Deja de lado la estéril competencia fuera del arte y la ciencia como si éstos fueran juegos olímpicos.

¿Qué se puede decir de la Geometría y del Álgebra?

Atiyah tiene un bello punto de vista acerca de esto que deseo compartirles. Menciona que ambas son pilares de la Matemática, ambas muy antiguas. Por un lado, la Geometría se remonta a los griegos o antes y como el entender el mundo en que vivimos es una parte importante de nuestra evolución, la intuición o percepción espacial es nuestra herramienta más poderosa. La Geometría es el área poderosa de la Matemática para estudiar lo geométrico y lo no geométrico también, tratamos de poner en términos geométricos lo no geométrico. La Geometría es el espacio y se puede ver estáticamente.

Por otro lado, el Álgebra se remonta a los árabes y los hindúes y concierne fundamentalmente al tiempo. Cualquier algoritmo tiene lugar en el tiempo, lo requiere para poder llevarse al cabo. Esto se puede ver de manera obvia en una computadora.

Así, dice Atiyah, la Geometría concierne al espacio y el Álgebra concierne a la manipulación en el tiempo. Ambas son indispensables. Piensen ustedes en la Música, con sus estructuras, la cual transcurre en el tiempo y está situada en el espacio (eminentemente terrícola puesto que un violín no suena en la luna).

Si consideramos los universos creados por el hombre tales como la Matemática y la Música podremos ver que el universo interno de ellas no es menos complicado e incontrolable que la naturaleza externa. Una pieza de naturaleza incontrolable, dada su riqueza de creación tal como la increíble complejidad a partir de un germen que implica procesos combinatorios, estrategias de interpretación, estratificación semiótica, etc. como el Arte de la Fuga de Bach, no es fundamentalmente diferente de una supernova en el espacio interestelar. Estamos actualmente viviendo un cambio tan radical en la Musicología como el que se experimentó en la Física hace 500 años. Es un momento maravilloso.

Sir James Joseph Sylvester escribe en 1864: "May not Music be described as the Mathematic of Sense, Mathematics as Music of the reason? The soul of each the same?" Es decir, "¿Acaso no puede describirse la Música como la Matemática de lo sensible y la Matemática como la Música del entendimiento? El alma de cada una, la misma". Ambas se crean, se recrean, podemos apreciarlas y disfrutarlas. Una ventaja o desventaja, según se quiera ver, es que para la Matemática no existe un instrumento musical donde tocarla, ésta se queda a nivel de partitura, podría decir, que va directamente de pensamiento a pensamiento.

Para mí, la relación más importante entre la Matemática y la Música es, que ambas son "Bellas Artes". Poseen características similares. Están relacionadas en el sentido de que la Matemática provee una base científica para comprender la Música y la Musicología y para que esta última pueda considerarse una ciencia, no una rama de la literatura poética común y corriente.

Para finalizar, vuelvo a expresar que la Matemática es una de las Bellas Artes, la más pura de ellas, que tiene el don de ser la más precisa y la precisión de las Ciencias.

Bibliografía

[A] Adams J.F. Vector fields on spheres. Ann. Math. 75 (1962) p.603-632.

[A-LL-S-S] Aisbett J, Lluis-Puebla E., Snaith V and Soulé C. On K*(Z/n) and K*(Fq[t]/(t2)). Mem. Amer. Math. Soc. Vol. 57, No. 329 (1985).

[A-H] Atiyah M, Hirzebruch F. Vector bundles and homogeneous spaces. Proc. of Symp. in Pure Math. Amer. Math. Soc. 3 (1961) p.7-38.

[A-S] Atiyah M, Singer I. The index of elliptic operators on compact manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963) p.422-433.

Atiyah, M. F. How Research is Carried Out. Bull. IMA. 10 (1974) p.232-234.

Atiyah, M. F. Mathematics and the Computer Revolution. Nuova Civilta delle Macchine II (No. 3) (1984) p. 27-32 y The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. Cambridge University Press. (1986) p. 43-51.

Atiyah, M. F. Identifying progress in mathematics. ESF Conference in Colmar. Cambridge University Press (1985) p. 24-41.

Atiyah, M. F. Mathematics in the 20 th. century. Reimpreso de Doctor Honoris Causa 2001. Universidad Nacional Autónoma de México. Instituto de Mtemáticas. UNAM. (2001)

[B-S] Borel A, Serre J-P. Le théor\`eme de Riemann-Roch. Bull. Soc. Math. France 86 (1958) p.97-136.

Davis, P.J., Hersh R. The Mathematical Experience. Houghton Mifflin Co. Boston. (1981).

[D] Dieudonné J. A Panorama of Pure Mathematics. Academic Press, (1982).

[L] Lam T.Y. Serre's conjecture. Lecture Notes in Mathematics 635. Springer-Verlag (1978)

[LL1] Lluis-Puebla E. Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica. Addison Wesley Iberoamericana, (1990).

[LL2] Lluis-Puebla E. et al. Higher Algebraic K-Theory: an overview. Lecture Notes in Mathematics 1491. Springer-Verlag. (1992)

[Ll-3] Lluis-Puebla, E. Artículo y videograbación de la Conferencia Magistral “Matemática: lo digno de ser aprendido”. Conferencia de clausura del VII Congreso de la Sociedad Boliviana de Matemática. Videoteca de la Sociedad Boliviana de Matemática. Cochabamba, Bolivia. (10/XI/2000)

Lluis-Puebla, E. Mazzola,G. Noll,T. eds. Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory. Universität Osnabrück. 2004. epOs. ISSN: 3-923486-57-x papel, 3-923486-58-8 CD ROM. http//dnb.ddb.de Versión Electrónica.

[M-B] MacLane S, Birkhoff G. Algebra. Macmillan. (1968)

Mazzola, G., (contribuyente Lluis-Puebla, E. et al.) The Topos of Music. Birkhäuser Verlag. Basel, Suiza. 2002.

Mazzola, G. Noll, T. Lluis-Puebla, E. Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory. epOs. Alemania. 2004.

Minio R. An inteview with Michael Atiyah. The Mathematical Intelligencer. Vol. 6 No. 1 (1984) p. 9-19.
[Q] Quillen D. Higher Algebraic K-Theory. Proc. Int. Con. of Math. Vancouver (1974)
[S] Serre J.P. Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. 61 (1955) p.197-278
[Sw] Swan R.J. Vector bundles and projective modules. Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962) p.264-277.
[V] Vaserstein L.N. Vector bundles and projective modules revisited. Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986)

Emilio Lluis-Puebla
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

www.emiliolluis.org

---

[i] Texto correspondiente a la conferencia invitada para el Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y Aprendizaje de las Matemáticas. Centro de Investigación en Matemáticas. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México. (XII/2008)

PLANTEAR Y REPLANTEAR PROBLEMAS PARA PROPICIAR LA INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA INDEPENDIENTE

Alfinio Flores Peñafiel
University of Delaware

Plantear y resolver problemas son actividades esenciales en la investigación matemática. Los problemas mantienen vivo un campo de investigación y son el meollo de las matemáticas (Halmos, 1980). Es importante por tanto que los profesionales de la educación matemática tengan en su formación experiencias no sólo de resolver problemas planteados por otros, sino también de plantear sus propios problemas. A fin de que los futuros profesionales de la educación matemática tengan la experiencia de explorar y descubrir matemáticas por su cuenta, se pueden ofrecer oportunidades que propicien que ellos planteen sus propios problemas matemáticos para resolverlos y hacer investigaciones. Los principios que guían estas oportunidades son que las matemáticas que las personas estudien sean personalmente relevantes para ellas; los participantes tengan un encuentro con las matemáticas como investigadores; y el foco de atención sea desarrollar la mentalidad matemática, más que aprender un cierto contenido matemático. Por medio de lecturas, participación activa extendiendo problemas en grupo, las discusiones en persona y en línea, y de trabajo independiente se trata que los alumnos desarrollen conocimientos, habilidades, y actitudes relacionadas con
1. Las conexiones entre las matemáticas escolares y las matemáticos avanzadas
2. Una comprensión de lo que significa hacer matemáticas
3. Una comprensión de los procesos para resolver problemas y plantear problemas
4. Estrategias que apoyen el aprendizaje de las matemáticas de por vida
5. Entender la investigación matemática
6. La confianza en la investigación matemática auténtica.

Replantear problemas a partir de un problema dado

Un primer paso para aprender a plantear problemas matemáticos que propicien una investigación matemática independiente y potencialmente fructífera es replantear problemas de manera sistemática a partir de un problema original. Presentaremos dos enfoques. El primero de los enfoques fue desarrollado por Brown y Walter (2005/1983). Por medio del uso sistemático de la estrategia de *¿Qué si no?* (What if not?) los alumnos pueden plantear nuevos problemas cambiando las condiciones del problema dado. Brown y Walter describen varias fases en el proceso para formular problemas a partir de un problema dado, que van de aceptar a desafiar las condiciones del problema, y el uso sistemático de la estrategia ¿Qué si no?

Por ejemplo, uno puede cambiar la perspectiva al ver una igualdad como $x^2 + y^2 = z^2$. Usualmente los alumnos ven la ecuación como un enunciado del teorema de Pitágoras, donde x, y y son los catetos de un triángulo rectángulo y z es la hipotenusa, y donde la pregunta se interpreta como encontrar ternas de números que satisfacen la ecuación como 3, 4, 5, ó 5, 12, 13. Podemos alentar a los alumnos a ver la ecuación de otras formas, por ejemplo, ver que la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ representa un círculo de radio z en el plano, o la ecuación de un cono en la tercera dimensión. Otro ejemplo es que al organizar una tabla de ternas pitagóricas los alumnos pueden ordernarlas por el tamaño de los lados, o de alguna otra forma en que revele alguna otra relación entre los triángulos, tal como la tabla babilónica de ternas que satisfacen una ecuación como $x^2 + y^2 = z^2$. En dicha tabla los ángulos de los triángulos correspondientes forman una sucesión creciente donde los ángulos difieren más o menos por un grado (Neugebauer, 1945). La estrategia propuesta por Brown y Walter sugiere que los alumnos modifiquen el enunciado dado, por ejemplo, tratar con una desigualdad $x^2 + y^2 < z^2$, o cambiar los exponentes de las variables.

Otro enfoque para replantear problemas a partir de un problema dado consiste en el uso de estrategias prototípicas para generar problemas nuevos modificando algunos de sus atributos. Algunas de las estrategias son especializar, extender, generalizar, plantear problemas conversos, y probar (Contreras, en prensa). Ilustraremos este enfoque a partir del teorema de Varignon para el caso del paralelogramo. Dado un paralelogramo arbitrario, se conectan los puntos medios de lados consecutivos para formar un nuevo cuadrilátero (Figura 1). Los alumnos pueden interactuar con una figura dinámica (Flores, 2008). Los alumnos pueden arrastrar los vértices del paralelogramo para obtener otros paralelogramos, observar la figura interior, conjeturar qué clase de cuadrilátero se forma siempre, y proporcionar evidencia convincente que apoye su conjetura.

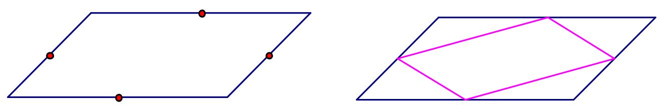


Figura 1: El teorema de Varignon para el paralelogramo.

A partir del caso del paralelogramo, los alumnos generan problemas para otros tipos especiales de cuadrilátros usando una clasificación jerárquica de cuadriláteros (Flores y Sowder, 2005) (ver figura 2). Según esta jerarquía, un paralelogramo es un caso especial de trapecio, o en otras palabras, el trapecio es una generalización del paralelogramo. Los cometas y los trapecios isósceles no son ni casos especiales ni generalizaciones del paralelogramo. Establecer el teorema para tales cuadriláteros sería un ejemplo de una extensión.

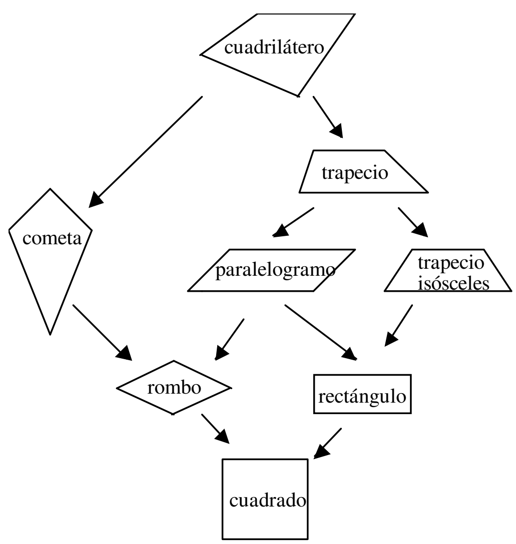


Figura 2: Una jerarquía de cuadriláteros.

Tanto el rectángulo como el rombo son casos especiales de paralelogramo. Los alumnos pueden especializar el teorema para estas figuras, y ver si el cuadrilátero interior tiene propiedades adicionales que para el caso del paralelogramo. Una vez que han establecido el resultado para el rectángulo y el rombo, los alumnos pueden especializar la exploración para el caso del cuadrado. Algunos alumnos exploran directamente sobre cuadrados, otros derivan el resultado para el cuadrado de los resultados para el rectángulo y el rombo, ya que un cuadrado es simultáneamente un rectángulo y un rombo, de modo que el cuadrilátero interior debe compartir las propiedades de los cuadriláteros interiores del rectángulo y el rombo.

Los alumnos pueden a continución extender el problema para el caso del cometa y el trapecio isósceles. En estos casos los alumnos también encuentran que el cuadrilátero interior es un tipo especial.

Para generalizar, los alumnos pueden generalizar el resultado del paralelogramo al trapecio o a un cuadrilátero arbitrario. Los alumnos pueden también generalizar a partir del cometa. ¿Cuál sería una clase de cuadriláteros que contiene propiamente a los cometas, pero que no incluye a todos los cuadriláteros?

Los alumnos también pueden plantear el problema converso. Si sabemos que el cuadrilátero interior es un rectángulo, ¿qué podemos decir del cuadrilátero exterior? Si el cuadrilátero interior es un rombo, ¿qué características tiene el cuadrilátero exterior? ¿Cuál sería el cuadrilátero más general cuyo cuadrilátero interior es un cuadrado?

Para todos los problemas generados antes, los alumnos pueden también generar el problema que consiste en enunciar su conjetura como teorema y probarlo.

Implementación de un curso.

Un curso diseñado para proporcionar oportunidades de investigación independiente necesita incorporar muchos elementos de apoyo y guía a fin de que los alumnos puedan lidiar con la frustración e incertidumbres intrínsecas de la investigación matemática independiente. El curso está altamente estructurado con actividades específicas (Flores y Jansen, 2008).

Participación en clase: El éxito en este curso depende en buena medida de la participación intelectual y verbal durante las exploraciones en clase, las discusiones y la reflexión durante el trabajo individual y en equipo. La siguiente tabla lista las exploraciones en clase y las principales conexiones matemáticas que involucran.

Lecturas: Las lecturas sobre matemáticas o procesos de resolución de problemas se asignan antes o después de que se traten los temas correspondientes en clase. Las lecturas se usan como base para las discusiones en línea. La selección de algunas de las lecturas depende en parte de los intereses de los alumnos en el curso. Las lecturas asignadas fueron varios capítulos del libro de Brown y Walter (2005/1983), varias secciones del libro de Polya (1985/1957), el capítulo sobre re-invención de Freudenthal (1973), el artículo sobre hábitos mentales de Cuoco, Goldenberg y Mark (1996), y el de Sinclair (2004) sobre el papel de la estética en la investigación matemática.

Diarios de clase: Los alumnos escriben un diario reflexivo donde documentan el desarrollo de su pensamiento matemático acerca de los problemas matemáticos explorados en clase. Cada semana durante la clase los alumnos tienen tiempo (de 20 a 30 minutos) para reflexionar en la investigación matemática, incluyendo cuestiones matemáticas o comprensiones profundas (insight) que la clase haya generado, o acerca de proceso de solución de problemas. Los instructores recogen y leen los diarios para tener una mejor idea del pensamiento matemático o actitudes y sentimientos de los alumnos, hacerles comentarios, y diseñar actividades basadas en el pensamiento de los alumnos.

Exploración	Conexiones matemáticas
Rectángulos parecidos al cuadrado (squareness)	Fracciones continuadas
	Algoritmo de Euclides
Exploraciones con 142857 y 076923	Aritmética modular
	Generadores de grupos cíclicos
	Grupos isomórfos
La hélice asimétrica	Vectores, velocidad, derivadas de funciones de varias variables
	Método cinemático
Varignon	Jerarquía de cuadriláteros
	Prototipos de problemas
Geometría de iteraciones numéricas	Aritmética modular
	Grupos isomórfos
Investigando los números reales	Números racionales e irracionales
	Conjuntos numerables y no numerables
	Expansiones decimales infinitas
Generalizaciones de Pitágoras	Ley de cosenos
	Teorema de Pappus
	Otras figuras en los lados
	Producto interior de vectores
	Identidades trigonométricas
	Pitágoras en tres dimensiones
Exploraciones de las medias	Promedio de velocidades
	Media armónica
	Desigualdades entre las medias
	Representación geométrica
	Promedios ponderados
	Paralelas en un trapecio

Cristalizaciones: Para la investigación en clase, además de documentar su pensamiento en el diario, los alumnos escriben dos "cristalizaciones"—reflexiones más formales que cristalizan su pensamiento acerca de la investigación en clase—durante el semestre. Estas cristalizaciones son compartidas y presentadas en clase.

Ejemplo de una cristalización. En una de las exploraciones sobre las medias de dos números, un grupo de alumnos encontró una representación geométrica de promedios ponderados de dos números a y b, como $\frac{3a+b}{4}$, partiendo de la conocida representación de la media artimética como la longitud del segmento que equidista de las dos bases en un trapecio (figura 3). En general, si la distancia de un segmento paralelo a la base a es n, y la distancia a la base b es m, el peso correspondiente a a será m y el peso correspondiente a b será n. La longitud del segmento está dada por $\frac{ma+nb}{m+n}$ (Figura 4). Utilizando la idea de promedio ponderado se puede encontrar la longitud de segmentos interesantes en el trapecio (Flores Peñafiel, en prensa). Un descubrimiento sorprendente para los alumnos es ver que es la longitud de algunos de estos segmento es igual a una de las medias de las bases a y b.

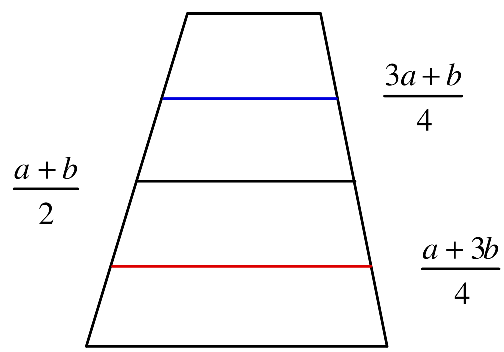


Figura 3: Promedios ponderados.

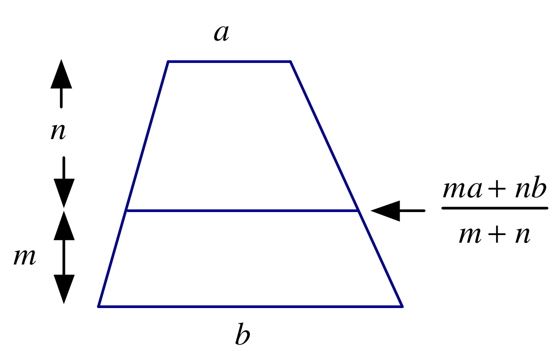


Figura 4: Pesos y alturas.

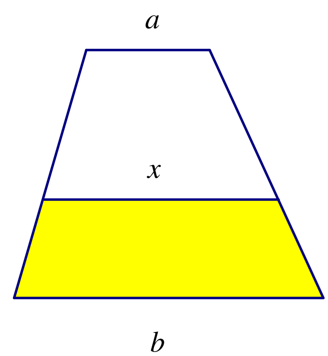


Figura 5: Áreas iguales y la media cuadrática $x = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

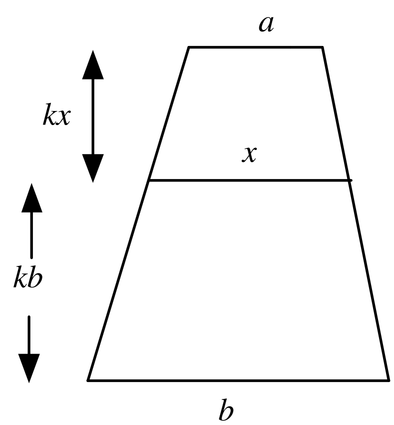


Figura 6: Trapecios semejantes y la media geométrica $x = \sqrt{ab}$.

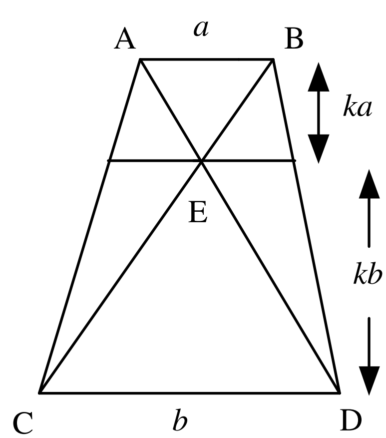


Figura 7: Interesección de las diagonales, y la media armónica $\dfrac{2ab}{a+b}$.

Discusiones en línea: En algunas semanas en particular se plantea una cuestión para discutir un tópico que necesita más tiempo para pensar en él que el disponible en clase. Cada persona debe hacer un mínimo de dos comentarios sustantivos en la semana correspondiente.

Proyecto de investigación: Cada estudiante debe conducir su propia exploración matemática por medio de un proyecto de investigación.

- Cada alumno debe desarrollar una cuestión matemática que sea relevante para sí mismo. Esta cuestión debe desarrollarse a lo largo del tiempo y posiblemente incluya una serie de subcuestiones.
- Los proyectos de investigación son discutidos en clase, y se da una muestra de ideas para proyectos de investigación. Los alumnos cuentan con un tiempo en clase de manera significativa para desarrollar y explorar sus ideas del proyecto de investigación solos y con el apoyo de sus compañeros.
- Se espera que los alumnos documenten sus avances y reflexiones en su diario de proyecto. Los alumnos escriben un diario del proyecto aparte de su diario de clase.
- Parte del tiempo de clase se dedicará a retroalimentación de los compañeros sobre el proyecto de investigación. Los alumnos discuten su proyecto con sus compañeros y solicitan sus comentarios.
- Cada alumno dará una presentación de su proyecto de investigación: el contenido matemático, el proceso, resultado, y aprendizaje.
- Un reporte final que documente lo que el alumno aprendió acerca de las matemáticas, y una reflexión sobre el proceso de investigación.
- Para ayudar con el reporte final y para que los alumnos desarrollen sus habilidades de crítica académica, cada alumno entrega una versión previa de su reporte a un consejo editorial de sus compañeros. Los árbitros/editores leen la versión preliminar y hacen comentarios al autor.

Comentarios finales

La conducción de actividades que ofrezcan a los alumnos la oportunidad de plantear sus propios problemas para investigar debe mantener un equilibrio entre un ambiente que propicie la creatividad y la exploración, un ambiente casi festivo por un lado, y mantener la integridad matemática, y la riqueza conceptual y rigor matemático que son deseables por el otro. Demasiado rigor así como un nivel demasiado avanzado de las matemáticas pueden resultar intimidantes para la exploración. Para muchos alumnos investigar matemáticas por su cuenta es una actividad novedosa y es más fácil que la ejerciten cuando se sienten en plena confianza con el nivel matemático y la libertad de tratar con las ideas de manera tentativa y con ejemplos particulares. Aunque el nivel matemático de las exploraciones en el curso descrito antes no fue más allá de las matemáticas de los primeros años de universidad, los alumnos dieron muestra de su creatividad y persistencia explorando de manera independiente ideas matemáticas que eran nuevas para ellos.

Referencias

Brown, S. I., y Walter, M. I. (2005) *The Art of Problem Posing* (tercera edición). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. (La primera edición fue publicada en 1983.)

Contreras, J. N. (En prensa). Generating problems, conjectures, and theorems with dynamic geometry: An environment for fostering mathematical thinking for all students. En A. Flores (Ed.), *Mathematics for every student: Responding to diversity, Grades 9 - 12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P. & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 375-402.

Flores, A. (2008) VarignonP [página electrónica interactiva] Accesible en http://www.math.udel.edu/~alfinio/Math567/VarignonP.html

Flores, A. y Jansen, A. (2008). *Math 567 Foundations of mathematics Spring 2008 Syllabus*. Department of Mathematical Sciences, University of Delaware.

Flores, A. y Sowder, L. (2005). Concept image and role of examples: The case of quadrilaterals. En Flores, A. *Teaching geometry 5 - 8. Class Notes*. Cap. 1, p. 9-12. Tempe, AZ: Arizona State University.

Flores Peñafiel, A. (En prensa). Las medias como promedios ponderados. *Miscelánea Matemática*.

Freudenthal, H. (1973). Re-invention. En Freudenthal, H., *Mathematics as an educational task*, p. 109-130. Dordrecht-Holland, The Netherlands: Reidel.

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *87*(7), 519-524.

Neugebauer, Otto. (1945). *Mathematical cuneiform texts*. New Haven, CT: American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, 1945.

Polya, G. (1985). *How to Solve It* (segunda edición). Princeton, New Jersey: Princeton University Press. (Libro originalmente publicado en 1957)

Sinclair, N. (2004). The roles of the aesthetic in mathematical inquiry. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(3), 261-284.

LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Fernando Hitt
Département de Mathématiques, Université du Québec à Montreal

En este documento queremos mostrar un acercamiento a la enseñanza de las matemáticas a través del uso de situaciones problema, y a través de una metodología de aprendizaje en colaboración, debate científico y auto reflexión (ACODESA, ver Hitt, 2007). Contrastaremos tangencialmente los sistemas educativos de México y Québec, y mostramos con detenimiento una experimentación para promover la construcción del concepto de covariación (Carlson, 2002) en estudiantes de 3º de secundaria en Québec y cómo la misma actividad (situación problema) puede ser utilizada en la formación de profesores a nivel universitario.

Introducción

La formación de profesores de matemáticas es una tarea otorgada a diferentes tipos de instituciones tanto en México como en Québec. En México, la Universidad Pedagógica y la Escuela Normal de Maestros están a cargo fundamentalmente de la formación de profesores de primaria y de secundaria. En el caso de Québec, de acuerdo con la estructura de cada una de sus universidades, los profesores de primaria y de secundaria se forman ya sea en su departamento de matemáticas o en su departamento de educación. Los responsables de su formación, en estas universidades, son los matemáticos, los didactas de la matemática y los pedagogos. De acuerdo a cada universidad, unos tienen más influencia que otros en los procesos de enseñanza.

El trabajo interdisciplinario es difícil tanto en México como en Québec. En las universidades de Québec, aún y cuando la formación de profesores de primaria y de secundaria se realiza en el seno de una facultad (de ciencias o de educación), existen tensiones entre los diferentes tipos de profesores, y cada uno de los argumentos vertidos por ellos es razonable hasta cierto punto. Por ejemplo, los matemáticos se quejan que los estudiantes tienen poca formación en matemáticas y que didactas y pedagogos no le dan mucha importancia a este hecho, los didactas opinan que en general, los matemáticos tienen un acercamiento tradicional y no toman en cuenta el avance en didáctica de las matemáticas y que los pedagogos tienen un acercamiento muy general que no influye mucho en los futuros profesores de matemáticas. Entre los didactas que no son sensibles al uso de tecnología en el aula, algunos consideran que hay demasiados cursos de tecnología y que debería haber más cursos de didáctica, los didactas promotores del uso de la tecnología, consideran a su vez que los profesores, en general, hacen poco uso o nada de tecnología en los cursos no etiquetados como tecnológicos. A su vez, los pedagogos consideran que los matemáticos y didactas deberían considerar aspectos más amplios de los problemas en el aula y no restringirse exclusivamente al aprendizaje de las matemáticas. Como vemos, estos problemas son semejantes tanto en Québec como en México y la poca interacción entre unos y otros no permite contar con un sistema de enseñanza más avanzado que el actual.

Veamos una comparación de estudios en México y Québec desde la primaria a la universidad.

Sistema mexicano	Sistema quebéçois
Preescolar: Un año	Preescolar: Un año
Primaria: 6 años	Primaria: 6 años
Secundaria: 3 años	Secundaria: 5 años
Estudios preuniversitarios: 3 años	Cégep (Colegio de Enseñanza General y Profesional): 2 años
Estudios universitarios: 4 o 5 años	Estudios universitarios: 4 años

Figura 1: Edades de estudio en México y en Québec.

Para ejercer la profesión de profesor de secundaria en Québec, el profesor debe contar con un grado de licenciatura en enseñanza de la matemática en el nivel de secundaria (de acuerdo al tablero, la secundaria en Québec es equivalente a la secundaria en México y dos años de estudios preuniversitarios). El profesor de Cégep (equivalente al último año de la enseñanza media y primer año de universidad) debe contar con un grado de matemático y con una maestría en matemáticas o en didáctica de las matemáticas. Ambas maestrías, están estructuradas para proporcionar elementos de iniciación a la investigación, ya sea en matemáticas o en didáctica. Con ello, queremos señalar que estas maestrías no están dirigidas directamente a resolver un problema de enseñanza en el aula de matemáticas, más bien, están estructuradas como prerrequisitos para realizar estudios de doctorado. Algunos didactas consideran que el problema de enseñanza de las matemáticas es grande en el nivel de Cégep dada la poca formación de los profesores en didáctica de las matemáticas, que en algunos casos es prácticamente nula.

En este documento, nos restringimos a la presentación de un curso de formación de profesores de secundaria en el Departamento de Matemáticas de la Université du Québec à Montreal (UQÀM), su relación a experimentaciones en el aula en la escuela secundaria que sustentan el curso, y su relación con el sistema educativo en Québec. Como lo hemos mencionado en los párrafos anteriores, los estudiantes que quieren ser profesores de matemáticas en la escuela secundaria en Québec (secundaria de 5 años), tienen que llevar cursos de didáctica ligados a los problemas de enseñanza en la escuela secundaria.

El curso Didáctica de la variable y las funciones está estructurado en tres partes principales: Resolución de situaciones problema, modelación usando tecnología, procesos de institucionalización. Este curso está enmarcado dentro del programa sobre competencias matemáticas implantado por el Ministerio de Educación de Québec (2007). Las experimentaciones que hemos realizado nos proporcionan elementos para mejorar nuestra enseñanza en la formación de profesores. Dichas experimentaciones las hemos llevado a cabo a partir del 2º año de secundaria dado que es allí donde se inicia con una introducción al concepto de función, y es a partir del 3er año que este concepto es central. Comparando con la escuela mexicana, en la escuela secundaria se introduce el concepto de función y se trabajan las funciones lineales, y es en los estudios preuniversitarios donde es fundamental el estudio de las funciones.

Aspectos teóricos sobre las representaciones

El avance que ha tenido la didáctica de las matemáticas en los últimos 20 años en el terreno de las representaciones, nos permite tener acercamientos de enseñanza que toman en cuenta aspectos teóricos sobre las representaciones. Para comenzar, surge la pregunta: ¿Qué es una representación y qué es un concepto?

Si buscamos en el diccionario, nos encontramos con definiciones como la siguiente:

Representación. Acto de representar: una representación gráfica, una representación teatral, una représentación diplomática, etc…

Concepto:

- Idea concisa que uno se forma de algo: el concepto del bien, el concepto del universo.
- Idea precisa, elaborada y clara que se forma acerca de algún objeto de conocimiento, singularizándolo, que generalmente organiza o fundamenta hipótesis o una teoría: el concepto del cero, los conceptos de la teoría de la relatividad.
- Opinion o juicio que uno se forma de algo o alguien.

En estas definiciones no existe una idea específica hacia la matemática. Podríamos preguntarnos si las representaciones y conceptos formados sobre objetos físicos es parecida a la formación de representaciones y conceptos de las matemáticas.

Tomemos un objeto físico como una mesa. Un niño construirá el concepto de mesa al mirar características de diferentes mesas, tocar la textura de ellas, ver el tipo de uso que se hace de ellas, y en algún momento dado, podrá representar una mesa con un dibujo y reconocer una mesa en una situación dada.

Ahora nos hacemos la pregunta: ¿Cómo construimos conceptos matemáticos?

La accesibilidad a los objetos matemáticos solo es posible a través de sus representaciones. Ello nos lleva a estipular que un concepto matemático se construye a través de la articulación entre representaciones. Puesto que nuestro interés se centra en el concepto de función, entonces es primordial en la construcción del concepto promover la articulación entre representaciones.

Ahora bien, el Ministerio de Educación, de la Recreación y del Deporte (2007), considera que la modelación matemática en el 3er año de secundaria es muy importante. Las funciones deben tratarse dentro de un contexto de "situación problema". Implícitamente, en el programa del MELS (2007), utilizan el marco teórico de Brousseau (1997), digamos en una versión aligerada; y también, se puede entrever la influencia de Duval (1993, 1995) sobre los registros de representación.

Para ubicar sobre el significado de la situación problema, hemos considerado pertinente hablar de lo que es un ejercicio, y de lo que concebimos como problema antes de proporcionar la definición del Ministerio de Educación de Québec sobre situación problema.

Qué es un ejercicio, un problema y una situación problema

Para la definición de ejercicio y de problema, utilizaremos la definición proporcionada por Hitt (2004, p. 353):

- **Ejercicio :**
  Cuando un enunciado matemático nos hace recordar un procedimiento determinado, podemos clasificar ese enunciado como ejercicio.

- **Problema :**
  Si un enunciado no nos hace recordar un procedimiento determinado y nos obliga a construir representaciones internas particulares que se ligarán a otro tipo de representaciones que están en juego, que va a promover una articulación entre esas representaciones y que va también permitirnos producir representaciones particulares ligadas al enunciado, entonces ese enunciado será para nosotros un problema.

A partir de ello, un ejercicio es una designación local. Lo que es un ejercicio para un individuo puede ser un problema para otro.

Situación problema según el MELS (2007, p. 22):

Competencia 1 Resolver una situación problema

¿Qué es lo que caracteriza una situación problema?

En matemáticas una situación problema debe satisfacer las condiciones siguientes:

- La situación no ha sido presentada anteriormente en clase;
- La obtención de una solución satisfactoria exige el recurso a una combinación no adquirida de reglas y principios de parte del estudiante;
- El producto, o su forma esperada, no ha sido presentada anteriormente.

La resolución de una situación problema, que constituye uno de los fundamentos de la actividad matemática, reposa sobre procesos heurísticos, es decir, la resolución queda enmarcada en la exploración y el descubrimiento.

Desde ese punto de vista, si tomamos en cuenta las características del Ministerio de Educación, tenemos entonces dos aspectos a considerar, los procesos de modelación matemática a través de la resolución de situaciones problema.

Modelación matemática

Con respecto a la modelación matemática, desde tiempos remotos es considerada como fundamental en el aprendizaje de las matemáticas. La modelación consiste en interpretar un fenómeno físico en términos matemáticos. Ella nos permite reflexionar sobre los fenómenos sin que sea necesario repetirlos; además que algunos de esos fenómenos no podríamos repetirlos a voluntad. Por ejemplo, el crecimiento de una población y la posibilidad de predecir cuántos habitantes podrá haber 30 años después.

La modelación matemática nos permite la posibilidad de desarrollar el pensamiento matemático y es muy útil en la comunidad en la que vivimos.

En general, para modelar, podríamos tomar el esquema siguiente:

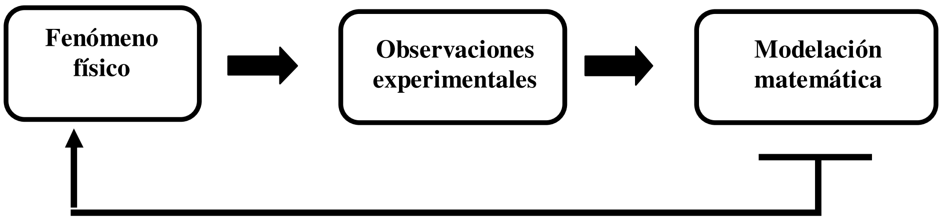


Figura 2: Proceso general sobre la modelación (1^{er} acercamiento).

La modelación matemática es uno de los aspectos más difíciles del aprendizaje de las matemáticas, ya que, en un proceso de modelación, es necesario no solamente utilizar varios conceptos matemáticos, sino también, extraer de la situación los elementos esenciales a tomar en cuenta. Por tanto, es necesario depurar la realidad para construir un "esqueleto matemático" que toma en consideración solamente los elementos esenciales y deje de lado el resto. En conclusión, para una situación dada, puede haber varios modelos, según la importancia que le otorgue el investigador a un elemento o a otro. En presencia de varios modelos matemáticos, en general se elije aquél que puede mejor explicar el fenómeno, y que conviene mejor a los objetivos preestablecidos. Esta habilidad del matemático que liga los conocimientos que pertenecen a disciplinas diferentes es, desgraciadamente, poco considerada en la enseñanza de las matemáticas.

Desarrollar una habilidad en los procesos de modelación, requiere de la resolución de situaciones problema ligadas a fenómenos físicos que se traducen al lenguaje matemático (esquemas, tabla de valores, gráficas, expresiones algebraicas, etc.).

Barry (2006, p. 88) realiza una tabla comparativa entre los componentes de la competencia acordada por el Ministerio de Educación (MELS, 2003) y el investigador Katja (2005).

Vemos una gran similitud lo propuesto en el programa de estudios de secundaria en Québec y lo propuesto por Katja en el (2005). Siguiendo este hilo conductor, podemos mencionar que, en general, investigaciones en didáctica de las matemáticas nos señalan la importancia de proponer a los estudiantes la ocasión de trabajar en el aula actividades matemáticas de modelación que ayuden a desarrollar una comprensión conceptual de las matemáticas. Esos estudios que consideran los aspectos teóricos sobre las representaciones, nos señalan algunas etapas en el proceso de modelación. Por ejemplo:

- Clarificar la situación problema utilizando diferentes tipos de representaciones. Sobre todo producir representaciones (esquemas) que nos ayuden a comprender la situación.

- Conjeturar, formular hipótesis.
- Formular matemáticamente la situación problema y encontrar representaciones adecuadas.
- Comprender la situación problema a través de representaciones utilizadas y anticipar la solución.
- Resolver matemáticamente la situación problema.
- Interpretar la solución.
- Validar el modelo matemático encontrado.
- Utilizar el modelo para explicar la situación y anticipar los resultados a través del modelo.

Componentes de la competencia de resolución de una situación problema (MELS, 2003)	**Etapas de procesos de modelación y competencias (Katja, 2005)**
Decodificar los lementos que se prestan a un tratamiento matemático,	Definir un *modelo real*: simplificando, estructurando, idealizando la situación original
Representar la situción problema por un modelo matemático,	Transformar el modelo real en un *modelo matemático*: por medio de la matematización
Elaborar una solución matemática,	Tratar matemáticamente el modelo
Validar la solución y,	Interpretar los resultados obtenidos a partir del modelo matemático
Compartir la información relativa a la situación problema y a la solución propuesta	Validar el modelo construido a la luz de soluciones obtenidas y de la matematización

Figura 3. Tabla comparativa de la proposición del MELS (2003) y Katja (2005)

Desde ese punto de vista, podemos rehacer nuestro esquema inicial y proponer otro mucho más específico que tome en cuenta las características anteriores.

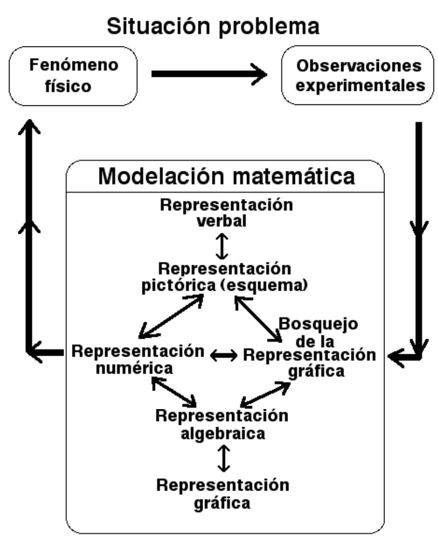


Figura 4: Proceso de modelación matemática (2o acercamiento).

Experimentación en 3º de secundaria y nivel universitario

En un contexto de aprendizaje en colaboración, de debate científico y de auto-reflexión (metodología ACODESA, ver Hitt, 2007), propusimos 5 actividades (situaciones problema) a dos grupos de secundaria durante 13 sesiones de 75 minutos aproximadamente para promover la construcción del concepto de covariación entre variables (ver Carlson, 2002). Los alumnos utilizaron material manipulable (cordón, alambre para soldar, palillos,…) en algunas de las actividades, esto les ayudó en sus procesos de modelación matemática, en particular en las representaciones funcionales que los condujeron, de manera natural, hacia las representaciones institucionales (ver Hitt, 2004; Hitt, Gonzalez-Martin & Morasse, 2008 et Gonzalez-Martin, Hitt & Morasse, 2008; Post, 1981). Con los estudiantes de licenciatura (futuros profesores), se utilizó solamente el cordón. La población, en una primera experimentación con una sola de las actividades, fue de varios grupos de 2º de secundaria, como producto se obtuvo una tesis de maestría, ver Passaro (2006) y Hitt & Passaro (2007); y posteriormente, que es lo que presentaremos a continuación, con dos grupos de estudiantes de 3º de secundaria y estudiantes de universidad.

Metodología ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión)

La metodología ACODESA integra varias situaciones problema interrelacionadas unas con otras (Glaeser, 1999). Ella toma en consideración el trabajo individual, trabajo en equipo, debate en el aula y auto-reflexión. Es una adaptación a un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las matemáticas (ver Hitt, Gonzalez-Martin et Morasse, 2008 et Gonzalez-Martin, Hitt et Morasse, 2008)

Veamos un resumen de las características de la metodología ACODESA (para una versión más completa, ver Hitt, 2007). Es importante señalar que en esta metodología, el profesor no dictamina sobre lo realizado por los alumnos en las primeras etapas, salvo al final en el proceso de institucionalización. En las 3 primeras fases el profesor es un guía y es deber de los estudiantes de argumentar y validar sus producciones, en el proceso de institucionalización es donde el profesor resalta las diferentes representaciones y presenta las representaciones institucionales:

- Trabajo individual (producción de representaciones funcionales para comprender la situación problema),
- Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales),
- Debate (que puede convertirse en un debate científico). Proceso de discusión y validación (refinamiento de representaciones funcionales),
- Regreso sobre la situación (trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión).
- Institucionalización. Proceso de institucionalización y utilización de representaciones institucionales.

Análisis *a priori* de las situaciones problema

Cada una de las situaciones problema tenía diferentes objetivos. Las dos primeras tenían como objetivo principal promover la producción de representaciones funcionales (espontáneas) de los alumnos (ver diSessa, 1991; Hitt, 2003, 2004, 2006, 2007; Hitt et al., 2008; Gonzalez-Martin et al., 2008). Es a partir de la 2a situación que las representaciones estándares comenzaban a ser utilizadas por los alumnos. Veamos lo que se solicitaba en cada situación:

El fotógrafo: Producción de un esquema, verbalización, representación numérica (tabla de valores).

El explorador: Producción de un esquema, verbalización, representación numérica (tabla de valores); y una representación gráfica (utilizando la cuerda).

El jacusi: Producción de un esquema, verbalización, representación numérica (tabla de valores); y una representación gráfica (utilizando la cuerda), y la producción de una representación algebraica.

Los cuadrados en movimiento: Producción de un esquema, verbalización, representación numérica (tabla de valores); y una representación gráfica (utilizando la cuerda), y la producción de una representación algebraica.

Las sombras: Producción de un esquema, verbalización, representación numérica (tabla de valores); y una representación gráfica (utilizando la cuerda), y la producción de una representación algebraica.

Situación problema: El explorador

Un explorador emprende una larga excursión en un bosque. Él sigue un camino que le permite volver a su punto de partida al final de la excursión. Durante la caminata, el camino nunca pasa por el mismo lugar, es decir, no hay cruces; esencialmente, el camino forma un circuito. Un puesto de socorro está situado dentro del área delimitada por el camino. Una asta de bandera permite al explorador localizar el puesto de socorro dondequiera que él esté en el camino. Dibuje un camino y coloque dentro de ese camino la estación de socorro.

Estamos interesados en la distancia recorrida por el explorador desde su punto de partida y la distancia al puesto de socorro. Primeramente, proporcione una descripción verbal explicando el fenómeno tomando en cuenta el camino dibujado, y encuentre nuevas maneras de comunicar sus resultados.

Análisis a posteriori

Los estudiantes después de eliminar muchos caminos, se decidieron a trabajar en uno que tuviera la forma cuadrada y el asta bandera en el centro (cuando hicimos la experimentación con estudiantes de 2o de secundaria, las formas de los dibujos no eran del todo geométricas).

Posterior a un trabajo individual y a la verbalización del fenómeno, con ayuda de los materiales utilizados (cordón, alambre para soldar, palillos) los estudiantes llegaron a una primera representación gráfica.

Figura 5: Pasarela entre el material y representaciones institucionales.

La presentación de los resultados obtenidos por uno de los equipos parecía indicar que todos los estudiantes estarían de acuerdo. Después de varios minutos, hubo un alumno que, tímidamente, se atrevió a decir que él pensaba que la representación gráfica debía ser diferente. Ello suscitó el debate tan ansiado por el profesor e investigadores… Inmediatamente después, hubo procesos de argumentación para sostener sus propuestas. En el caso del alumno, una estudiante del primer equipo, mencionó que la "pista" ligada a la gráfica propuesta no podía ser cuadrada, y que de hecho, debía tener bordes redondos en lo correspondiente a las esquinas del cuadrado (dibujo de en medio de la figura), y que por tanto, su gráfica debía ser rechazada. Sin embargo, otra estudiante propuso algo completamente diferente, considerando un círculo como primera etapa, "*desenvolviendo el alambre de soldar imaginario y palillos imaginarios*", produciendo preliminarmente otro tipo de gráfica (ver dibujo de la derecha).

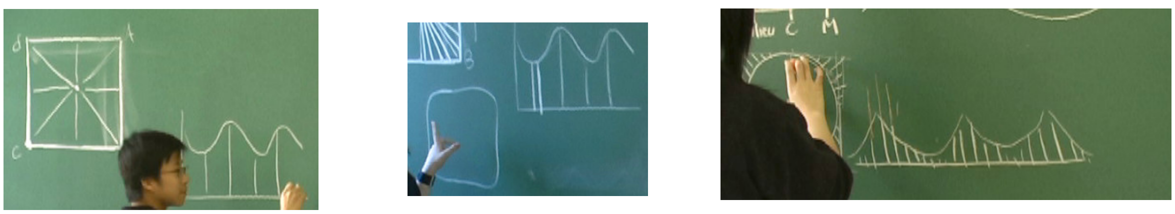


Figura 6: Argumentaciones en el debate científico.

El profesor solicitó que regresaran al trabajo en equipo, y decidieran exactamente qué tipo de gráfica correspondía al fenómeno en cuestión. La precisión en su dibujo y la toma de medidas en forma más precisa, llevó a los estudiantes a encontrar la gráfica adecuada y el consenso se estableció.

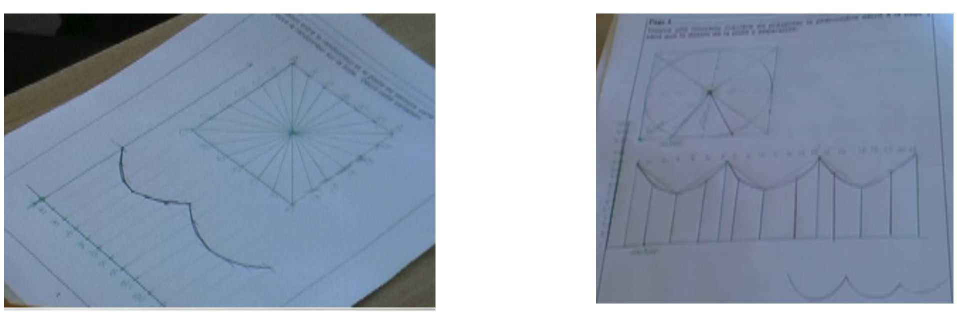


Figura 7: El consenso.

Para la cuarta fase, el profesor recoge todas las producciones de los alumnos, y solicita un trabajo individual de reconstrucción de lo realizado en las fases anteriores. Este trabajo puede ser una tarea para realizarla en casa. Debemos recordar que para esta actividad, no se les había solicitado a los estudiantes llegar hasta la representación algebraica. Era a partir de la tercera situación problema donde se les solicita la representación algebraica.

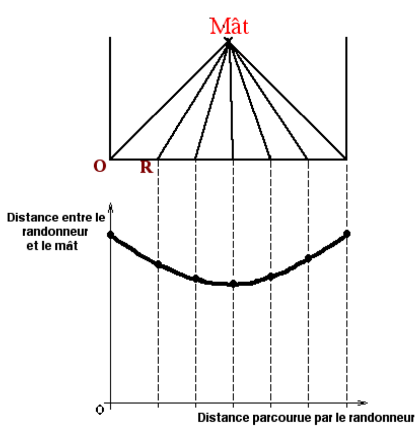
La quinta fase es el proceso de institucionalización de la parte del profesor. Es en este momento que él valida lo realizado por los estudiantes y utiliza las representaciones institucionales.

Experimentación a nivel universitario

Primera etapa del curso

En el caso de los profesores en formación utilizamos la misma actividad. En general, se nota que los estudiantes a este nivel escogen caminos geométricos en donde llegar a la representación algebraica no es tarea fácil. En las experimentaciones que hemos realizado, el camino cuadrado ha sido seleccionado, y al igual que con los alumnos de secundaria se les solicita que utilicen la cuerda para obtener una representación aproximada de la representación gráfica. Al principio les parece juego de niños el utilizar la cuerda, ya que fácilmente llegan a la representación gráfica; pero las dificultades empiezan con la producción de las representaciones algebraicas. La gráfica obtenida con la cuerda llega a servir como elemento de control (en el sentido de Saboya et al., 2006) para desarrollar los procesos algebraicos, la calculadora con pantalla gráfica proporciona el elemento de control al final del proceso algebraico. En algunos casos, los estudiantes utilizan Cabri-Géomètre en la simulación de la situación y obtención de la representación gráfica.

Representación gráfica utilizando un cordón



Representación algebraica

Nomenclatura: ***R:*** Explorador

A: distancia del lado del cuadrado; ***d:*** distancia del punto inicial al explorador *d(O, R)*; ***D:*** distancia del explorador al asta de la bandera *d(R, M)*; ***S:*** el punto medio del lado horizontal del cuadrado y finalmente, ***m:*** la distancia de ***S*** al asta de la bandera.

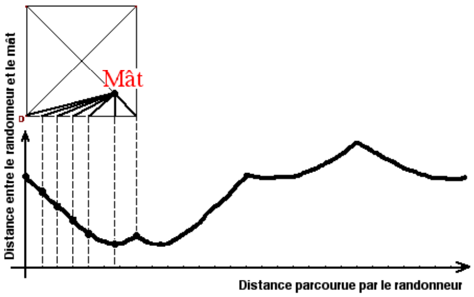
$$D(d)=\sqrt{\left(d-\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{A}{2}\right)^2} \quad \text{o}$$

$$D(d)=\sqrt{d^2-A\,d+\frac{A^2}{2}}$$

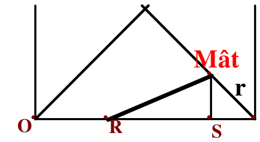
Figura 8: Actividad en el nivel universitario con los futuros profesores.

En el caso de los estudiantes universitarios se puede poner un problema más complejo, colocando el asta bandera en otro lugar sobre una de las diagonales:

Representación gráfica utilizando un cordón



Representación algebraica



$$D(d)=\sqrt{\left(A-\frac{r}{\sqrt{2}}-d\right)^2+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

Figura 9: Situación más difícil, actividad en el nivel universitario con los futuros profesores.

Esta actividad del explorador que tiene características de situación abierta, cuando se solicita dibujar un camino, pueden surgir muchas formas geométricas interesantes a trabajar en el aula. Diferentes situaciones que han surgido de parte de los estudiantes universitarios son las siguientes:

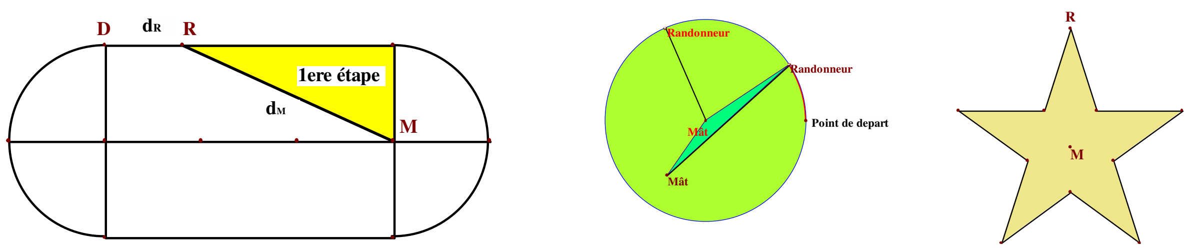


Figura 10: Proposiciones, situación abierta.

Segunda etapa del curso

Integración de la tecnología en el aula de matemáticas relativa al concepto de función.

CRECIMIENTO DE UNA POBLACIÓN

Utilizando el tablero y la representación gráfica sobre el crecimiento poblacional de México, ¿Es posible construir una función que modele el fenómeno? Si la respuesta es afirmativa, ¿Es posible predecir la población de México para el 2050?

Año	Población en millones
1885	12
1900	14
1910	15
1921	14.2
1930	16.6
1940	20
1950	25
1960	35
1970	48
1980	67
1990	81
1994	89.6

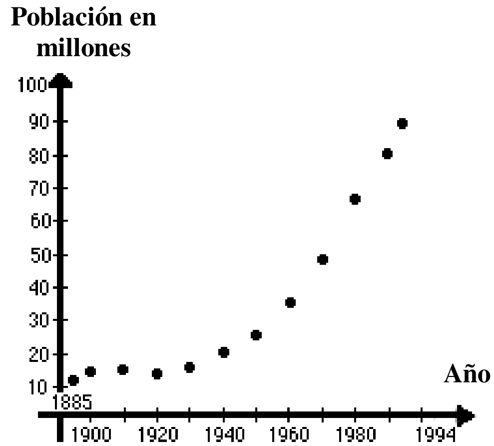


Figura 11: Datos de la vida real, modelos matemáticos y uso de tecnología.

La forma más simple es la de unir cada punto con un segmento y construir una función en partes. Otra posibilidad es la de pensar que una función cuadrática puede modelar el fenómeno. Con una función cuadrática y utilizando la calculadora para encontrar una cuadrática como curva de regresión, los estudiantes obtienen lo siguiente.

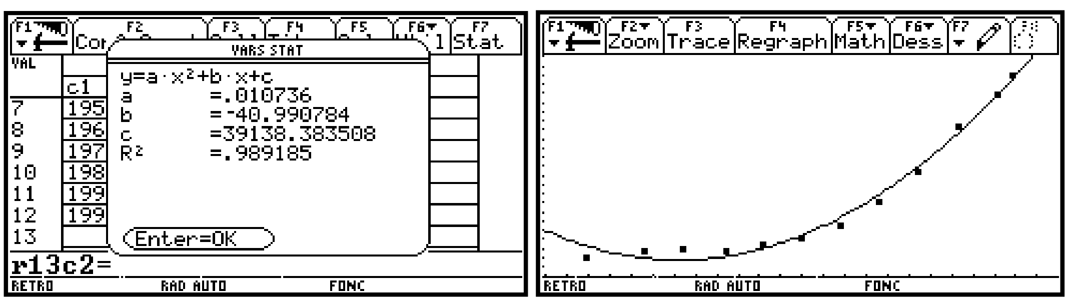


Figura 12: Datos de la vida real, modelos matemáticos y uso de tecnología.

Con esta función podemos calcular y hacer una predicción para el 2050, que es de !***223.67 millones de habitantes***! Si esto fuera posible, México estaría inmerso en un problema mayor…

Trabajando con otro tipo de funciones (modelos matemáticos si se quiere), por ejemplo la función logística que viene integrada en las calculadoras: $f(x)=\dfrac{a}{1+be^{(cx)}}+d$, con a, b, c, d constantes reales, se solicita a los estudiantes de modelar el fenómeno (ver figura).

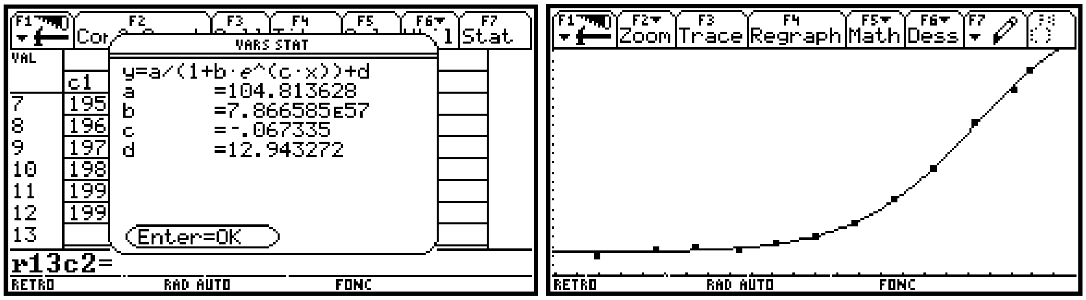


Figura 13: Datos de la vida real, modelos matemáticos y uso de tecnología.

Con esta función denominada logística, podemos calcular nuestra predicción para el año 2050, que proporciona el resultado de ***116.84 millones de habitantes***, cantidad que es más cercana a las expectativas de los mexicanos…

Si observamos las representaciones gráficas proporcionadas por los dos modelos de crecimiento, vemos que la función logística es mucho más adecuada que la cuadrática para fines de explicar el fenómeno.

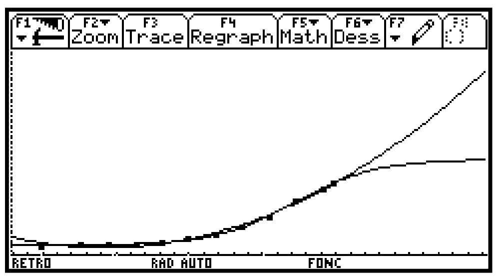


Figura 14: Datos de la vida real, modelos matemáticos y uso de tecnología.

Tercera etapa del curso

La tercera etapa del curso tiene que ver con el estudio del comportamiento de las funciones, en el sentido que es en esta fase en donde se analizan propiedades de las funciones, y se institucionalizan los procesos de transformaciones de las funciones (desplazamientos), composición de funciones, funciones inversas, etc. El acercamiento es primero con el *uso de la cuerda*, y posteriormente con procesos algebraicos.

Conclusiones

En este documento hemos querido expresar nuestras inquietudes sobre cómo concebimos el trabajo en el aula de matemáticas, utilizando situaciones problemas, una metodología ACODESA que trata sobre el aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión, y la formación de profesores de matemáticas en la escuela secundaria en Québec y su correspondiente con el sistema mexicano.

Las situaciones problema toman más tiempo de trabajo en el aula, y requiere que tanto el profesor como los alumnos se acostumbren al método. Algunos alumnos que han llevado una enseñanza tradicional no les gusta el método ya que se sienten inseguros en su desempeño y prefieren que sea el profesor que realice una enseñanza magistral. Sin embargo, la metodología funciona y es posible observar el avance de los estudiantes en situaciones complejas tanto a nivel secundario como en el universitario.

Con respecto a la experimentación realizada en 3o de secundaria, hemos constatado que, utilizando las situaciones problema antes mencionadas, los estudiantes adquieren el concepto de covariación, que es fundamental para la construcción del concepto de función.

En relación con los resultados de Karsenti (2003) que muestra el olvido de la matemática elemental desarrollada en la escuela pre-universitaria, de parte de adultos que en sus estudios eligieron la opción en ciencias y que posteriormente realizaron estudios no ligados directamente a la matemática (artes, fotografía, etc.), consideramos que con un acercamiento como el que proponemos, con situaciones problema y la metodología ACODESA, la matemática construida por los estudiantes en un ambiente sociocultural, será más rica en articulaciones entre los diferentes conceptos matemáticos, por tanto permanecerá más tiempo en los estudiantes como un "*saber*", y no como un "*conocimiento aislado*"; y cuando sean adultos, creemos que habrá mayor retención de los conceptos matemáticos.

Referencias

Barry, S. (2008). Analyse des resources mises à contribution par enseignant et chercheur dans l'élaboration de scenarios d'enseignement en dénombrement visant le développement de la modélisation en secondaire 1. *Thèses de doctorat* non publiée, Université du Québec à Montréal. Montréal, Québec.

Carlson, M. (2002). Physical enactment: a powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships, in Hitt, F. (ed.), *Representations and mathematics visualization* (pp. 63-77), Special issue of PME-NA and Cinvestav-IPN, Mexico.

diSessa A., Hammer D., Sherin B. & Kolpakowski, T. (1991). Inventing Graphing : Meta-Representational Expertise in Children. *Journal of Mathematical Behavior,* 10, 117-160.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.

Glaeser G. (1999). Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques. *La Pensée Sauvage Éditions*. France.

Gonzalez A., Hitt F. & Morasse C. (2008). The introduction of the graphic representation of functions through the concepto co-variation and spontaneous representations. A case study. In Figueras, O. & Sepúlveda, A. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, and the XX North American Chapter Vol. 3, pp. 89-97. Morelia, Michoacán, México: PME.

Hitt F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 8, 255-271.

Hitt F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique, in Lemoyne, G. (ed.), *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : complexité et diversité des cadres d'étude*, V. XXX, no. 2, 329-354.

Hitt F. (2004). Une comparaison entre deux approches, enseignement des mathématiques sans ou avec logiciels et calculatrices symboliques. In Guiménez J., Fitz Simons G. and Hahn Corine (2004) Actes de la CIEAEM-54, Vilanova i la Geltrú. Spain, pp. 351- 359.

Hitt F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example : The concept of limit, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 11, 253-268.

Hitt F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion, in Baron, M., Guin, D. & Trouche, L. (eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88), Éditorial Hermes.

Hitt F., Gonzalez A. & Morasse C. (2008). Visualization and students' functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of co-variation as a prelude to the concept of function. In 11th International Congress on Mathematics Education (ICME-11), Topic Study Group 20 (TSG 20), Visualization in the Teaching and Learning of Mathematics, July 6-13, 2008, Monterrey, N. L., Mexico. http://tsg.icme11.org/tsg/show/21.

Hitt F. & Passaro V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes : le rôle des représentations spontanées, *Actes de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM-59), Dobogókö (Hungary), 117-123.

Katja, M. (2005). Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. *Teaching Mathematics and its applications*. Volume 24, No. 2-3, pp. 61-74.

Karsenty R. (2003). What do adults remember from their high school mathematics ? The case of linear functions, *Educational Studies in Mathematics*, 51, 117-144.

Krutetskii V. A. (1976). *The psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. The University of Chicago Press.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport (MELS) (2007). Programme de Formation, Deuxième Cycle du Secondaire. http://www.mels.gouv.qc.ca/DGFJ/dp /menusec.htm.

Passaro V. (2007). Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d'éléves du premier cycle du secondaire. *Mémoire de Maîtrise* non publiée. Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec.

Post T. (1981). The role of manipulative materials in the learning of mathematical concepts. *In selected issues in Mathematics Education* (pp. 109-131). Berkeley, CA: National Society for the Study of Education and NCTM, McCutchan Publishing Corporation.

Saboya M., Bednardz N. & Hitt F. (2006). Le contrôle sur l'activité mathématique comme constitutif de la rationalité en mathématiques: élaboration d'un cadre de référence. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone*, Theme 8, Sherbrooke, Québec.

REPORTES DE INVESTIGACIÓN

LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN EL CCH

Arturo Ávila Curiel Víctor Manuel Pérez Torres Marco Antonio Santillán Vázquez
CCH-UNAM
marcoant50@hotmail.com

La renovación natural de la planta docente del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) y el bajo nivel de aprendizaje en las materias de matemáticas demanda diseñar un plan estratégico de formación y actualización de profesores de matemáticas. La dimensión de esta empresa obliga a sumar fuerzas en una dirección específica, atender la formación de los profesores de muy reciente ingreso y de los que se contraten a futuro. Se trata de formar docentes competentes para ofrecer enseñanza de calidad.

Introducción

La enseñanza de matemáticas del nivel medio superior en adelante ha estado, en el mejor de los casos, en manos de matemáticos, físicos e ingenieros, nunca en profesionales de la enseñanza de las matemáticas. La razón es simple: en México no hay formación profesional de profesores de matemáticas.

Lejos ya de una tradición en la que, para ser profesor de matemáticas del CCH, se debía pasar por un proceso de ingreso con evaluaciones de conocimientos generales de la materia y de habilidad para desarrollar temas curriculares en el aula, calificados siempre por jurados integrados con investigadores y profesores de gran prestigio en matemáticas; hoy la selección de profesores está muy relajada y comienza a mostrar una tendencia peligrosa; si bien con anterioridad los aspirantes y en especial, los seleccionados para formar la planta de docentes, tenían una característica sobresaliente: la mayoría eran egresados de una licenciatura de matemáticas, en la actualidad son pocos los matemáticos que se integran a la docencia de esta materia. Por ejemplo, en los últimos cinco años, de los treinta profesores que ingresaron a dar matemáticas en un plantel del CCH, ninguno era egresado de la carrera de matemáticas.

Evaluaciones internacionales de los últimos años nos han mostrado la baja calidad de la educación nacional. Al presentarse los resultados de PISA 2006, se señaló que: *50% de los jóvenes de 15 años se ubicó en los niveles cero y uno, los más bajos de rendimiento escolar en las habilidades científicas, matemáticas y de lectura, lo que significa que están poco calificados para pasar a los estudios superiores y resolver problemas elementales*.[ii]

Los resultados de la SEP (prueba *Enlace*), no son diferentes y, aunque el promedio de secundaria de los alumnos que ingresan al CCH es de al menos ocho y la calificación obtenida en el examen de ingreso es aprobatoria, el nivel de conocimientos es mínimo.

Las evidencias son múltiples, la educación básica y media básica (la primaria y secundaria) es muy mala en el país y como consecuencia, los aprendizajes de matemáticas son desastrosos. De acuerdo con lo anterior, los alumnos que ingresan al bachillerato, salvo pocas excepciones, tienen *la marca de la casa*, esta es la realidad y es un punto de arranque para cualquier proyecto que pretenda enfrentar y corregir el bajo nivel en matemáticas.

¿Cuál es el elemento fundamental para mejorar el aprendizaje de matemáticas? Los profesores. Su papel en el aprendizaje está a la par del que corresponde a los estudiantes. En este momento hay otra circunstancia que hace del tema: profesores, un eje central en los aprendizajes en el CCH, la renovación de la planta docente del área de matemáticas. Esto significa, en buena medida, que los *nuevos* profesores también serán los responsables de enfrentar el problema de mejorar los aprendizajes y tal vez, serán ellos los llamados a resolverla.

Formación de profesores, orientación general

Hay dos elementos indispensables que deben considerarse en los programas de formación de profesores de matemáticas del bachillerato: la actualización continua de los docentes y su profesionalización. Además de ser permanentes, este tipo de programas deben dar respuesta a interrogantes como: ¿Cuáles son las habilidades y conocimientos que debe caracterizar a un profesor de la materia? ¿Qué áreas de conocimiento deben articular la formación de un profesor de matemáticas?

En un mundo que cambia rápidamente, las modificaciones curriculares se suceden cada vez en menos tiempo y este fenómeno incide en la necesidad de actualización permanente. Uno de los principales factores de cambio es la tecnología y en el terreno de la educación, las llamadas Tecnologías de la Información y Conocimiento (TIC), no pueden dejarse a un lado al tratar la formación de profesores de matemáticas.

Profesionalización de la enseñanza de matemáticas

El punto de partida de un proyecto de formación y actualización de profesores es el reconocimiento de la no existencia de formación profesional de profesores de matemáticas para el bachillerato. Quienes impartimos clases de matemáticas en este nivel, hemos cursado una carrera universitaria, no necesariamente de matemáticas, y nadie tiene estudios, a nivel universitario, para ser profesor de esta materia. En general, ingresamos a una planta docente sin estar capacitados para ser profesores. Ahora bien, algunos aprenden rápido y llegan a ser buenos profesores, la mayoría lo hacen en un largo proceso y otros nunca aprenden.

Se trata entonces de formar profesionalmente a los educadores de matemáticas. Es evidente que esto requiere de tiempo y que el objetivo no se alcanza de golpe, se debe avanzar paulatinamente, pero con una dirección clara: La profesionalización. ¿Qué significa la profesionalización de la enseñanza en las matemáticas del bachillerato? Convertir en profesión una actividad que no lo era y asumirla de manera permanente y exclusiva. La profesionalización de la enseñanza en matemáticas significa ejercer de manera competente esta actividad u oficio y llegar a ser eficiente.

Un profesional de la docencia, por principio, conoce su materia, está capacitado para enseñar matemáticas, porque sabe matemáticas. El profesional de la docencia puede valorar y revalorar su práctica, corregir fallas y limitaciones. El profesional en docencia tiene la capacidad para sistematizar regularmente su experiencia y utilizar diversos marcos conceptuales al planear su actividad. Contrapuesto al profesional de la educación en matemáticas, que estudia las teorías sobre el aprendizaje y se actualiza en la cognición ligada a las matemáticas, el profesor empírico sólo atina a usar el ensayo y error como su principal y único instrumento para aprender a enseñar.

Actualización

¿Qué se necesita para ser profesor de matemáticas? Saber matemáticas y saber enseñar matemáticas. Primero hay que saber matemáticas, pero esto no implica lo segundo. Para lograr ser buen profesor es indispensable la actualización permanente en estas dos componentes.

La matemática es una rama del conocimiento en constante desarrollo. Durante la última mitad del siglo XX entró al currículo el álgebra lineal, las teorías de gráficas y conjuntos y la estadística, entre otros temas, lo que obligo a la actualización de los profesores. Las nuevas áreas de la matemática son asimiladas rápidamente a los currículos. Además, la investigación en didáctica de la matemática está presentado nuevos acercamientos a temas tradicionales. Así, han aparecido los términos álgebra temprana y precálculo. También, las nuevas tecnologías presionan continuamente al currículo y lo modifican más temprano que tarde. Ligadas a estas tecnologías hoy hablamos de geometría intrínseca y geometría y estadística dinámicasiii. Estas herramientas de software también abren nuevos enfoques para la enseñanza de las matemáticas. Todo lo anterior, obliga al profesional de la docencia y en general, a todo maestro de matemáticas, a la actualización constante de sus conocimientos.

En los cursos de actualización se debe estudiar, discutir y experimentar los resultados alcanzados en didáctica de las matemáticas, por ejemplo, la naturaleza del corte didáctico y sus implicaciones para aprender ecuaciones; la teoría APOE y el aprendizaje del cálculo; el papel de los registros de representación matemática en el proceso de aprender matemáticas y la zona de desarrollo próximo para apoyar el aprendizaje del novato, entre otros muchos temas. Merece mencionarse aparte la resolución de problemas, un eje troncal de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La renovación de la planta docente y la forma como se contrata a los nuevos profesores, obligan a que los programas de formación lo sean también de actualización permanente.

Marco conceptual

En la formación y actualización de profesores intervienen múltiples factores interrelacionados, de modo que, para su análisis, es estrictamente necesario caracterizar e integrar varias perspectivas con el fin de establecer claramente cuáles son los conocimientos y habilidades a desarrollar con los futuros profesores y el personal en activo, tendientes a mejorar los aprendizajes.

El análisis de los procesos de enseñanza-aprendizaje y los fenómenos producidos en el aula, requieren un marco de referencia para analizar las relaciones didácticas y poder abordar y resolver algunos problemas típicos del aula. Por ejemplo, podríamos considerar el triángulo didáctico, según Socas (2001), del que, para la formación de profesores y el problema de los aprendizajes, debe enfatizarse la relación del alumno con el conocimiento matemático. Las otras relaciones, propias de la enseñanza, son la médula de la formación de profesores.

Figura 1: El triángulo didáctico.

Resumiendo demasiado, existe una relación de tipo institucional con programas, objetivos y el conocimiento establecido, que el profesor debe dominar para guiar la actividad en el aula; Desde el vértice profesor, otra componente involucra relaciones interpersonales de comunicación y colaboración mutua que debe tener presente el docente para el éxito en el aula. Estas son las dos componentes de la formación de profesores, el conocimiento de la materia y la didáctica y elementos afectivos.

Las relaciones de los alumnos con el conocimiento matemático, que los profesores necesitamos conocer, involucran aspectos cognitivos y socioculturales, pero los primeros son esenciales, en tanto ayudan a describir cómo aprenden los alumnos.

En la formación y actualización se debe tener en cuenta que gran parte de los problemas planteados en el desarrollo de la docencia de matemáticas aparecen como consecuencia de las concepciones y creencias sobre las relaciones entre enseñanza y aprendizaje, algunas, producto de la propia formación universitaria. Estas creencias y concepciones se refuerzan muchas veces con la práctica ciega, desarrollada en el aula por cada uno de nosotros.

Todos los profesores tenemos una concepción de la matemática, de qué es, cómo surge y cómo se aprende. Esta concepción se plasma en la forma como enseñamos, en lo que ponemos acento. Todos tenemos información, conocimientos, creencias y concepciones al respecto que conviven como una y la misma cosa, y aquí está un serio problema. Podemos estar o no conscientes de nuestras creencias y éste también es un problema pero, cuando no distinguimos entre conocimiento y creencias en cuanto a qué significa saber matemáticas y cómo se aprende, estamos frente a una situación muy peligrosa. Por tal razón, los programas de formación y actualización deben enfrentar el análisis del aprendizaje, entendido como el resultado de las relaciones entre el contenido, el alumno y el profesor, los tres vértices del triángulo didáctico de arriba y las creencias, tanto del profesor, como del alumno.

Hipótesis

De acuerdo con el trabajo realizado anteriormente en la formación de profesores, afirmamos que:

- ▪ Los programas de formación y actualización con alto grado de coherencia entre las componentes: matemática, pedagógica y didáctica, impactarán positivamente en la práctica de profesores altamente calificados y profesionales.
- ▪ Lo anterior se reflejará en la calidad del aprendizaje de los alumnos.

Objetivos

De acuerdo con lo anterior, las metas de los programas de formación y actualización[iv] docente deben orientarse hacia:

- ▪ Proporcionar una sólida formación matemática y la actualización permanente de la misma, incluidas las nuevas tecnologías.
- ▪ Ofrecer formación didáctica y pedagógica a nivel básico y garantizar la profundización de estos conocimientos.
- ▪ Estudiar las creencias de los profesores en servicio y de nuevo ingreso sobre la relación entre enseñanza y aprendizaje en matemáticas y modificarlas en la medida que representen obstáculos potenciales para la enseñanza.
- ▪ Ofrecer capacitación en áreas de historia y filosofía de las matemáticas.
- ▪ Abrir la modalidad y fomentarla, de investigación en educación matemática entre grupos de profesores de los problemas reales del aula y el currículo.

Temática

Considerando las características específicas de los aspirantes a profesor de matemáticasv en el CCH, asumimos que la formación y actualización docente debe ser permanente y guiarse por tres componentes:

1) Contenidos matemáticos, 2) didáctica-pedagogía y 3) filosofía e historia.

La primera componente representa los contenidos formales de la disciplina, organizados a través de:

- Resolución de problemas
- Fundamentos (Introducción al análisis)
- Pensamiento numérico y algebraico (Incluida el álgebra lineal)
- Pensamiento geométrico (geometrías euclidiana, analítica y moderna)
- Pensamiento variacional (cálculo y ecuaciones diferenciales)
- Probabilidad y estadística
- Nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas
- Investigación en educación matemática.

Una forma para organizar los temas de didáctica consiste en abordar los problemas comunes en los cursos del Colegio, a través de las siguientes líneas:

a. La transición de la aritmética al álgebra. ¿Continuidad o ruptura?
a_1. Generalización, abstracción y simbolización.
a_2. Ecuaciones y funciones, enfoque tradicional o nuevos acercamientos (el corte didáctico).
b. Geometría ¿Deducción o prueba?
b_1 Argumentación, deducción y demostración, su papel en la formación del perfil de los egresados.
b_2. ¿Regla y compás contra geometría dinámica?
b_3. Didáctica de la geometría (*niveles* y *fases* de Van Hiele)
c. Cálculo ¿Formalidad o intuición?

c_1. La variación y rapidez de variación media e instantánea ¿Continuidad o ruptura?
c_2. El problema de los procesos infinitos y el límite
c_3 Los enfoques algebraicos y de infinitesimales
d. Nuevas tecnologías ¿Qué es nuevo, diferente? ¿Se aprende más? ¿Cómo se aprende?
d_1 Hoja de cálculo, graficadores, geometría y estadística dinámica (Taller de cómputo)
d_2 ¿Qué software es didáctico?

La componente didáctico-pedagógica debe abordar:

a. Teorías y modelos de aprendizaje
b. Aspectos cognitivos en el aprendizaje de matemáticas
c. Trayectorias hipotéticas de aprendizaje

La componente Histórico-filosófica de la matemática deberá enfocarse en discutir, entre otros temas:

a. Las diferentes concepciones de las Matemáticas
b. Las crisis en las Matemáticas
b. Fundamentos de las Matemáticas

La coherencia interna de las componentes señaladas arriba, requiere desarrollar y explicitar objetivos y metodología. La temática misma está sujeta a modificaciones pues aún estamos en la etapa de discusión y revisión de esta propuesta.

Conclusión

Se deben enfocar recursos económicos y humanos en una dirección estratégica para el CCH, la UNAM y el país. Se debe rescatar la experiencia de lo que ha fallado y funcionado en la formación y actualización docente; una experiencia de muchos años y esfuerzos, de logros y, fracasos y errores que no deben repetirse. Se trata de tener un plan, ponerlo en marcha y cuidar su desarrollo. Necesitamos un programa que involucra y beneficia especialmente a los nuevos docentes y puede garantizar el desarrollo exitoso de la institución.

Si bien es estrictamente necesario estudiar las preguntas formuladas en este documento para darles respuesta, no cancelamos la posibilidad de reformularlas, abordar otras y plantear nuevos cuestionamientos, por ejemplo, creemos que es urgente comenzar a explorar ¿qué conocimientos de matemáticas son básicos para garantizar una rápida adaptación de los profesores a los cambios curriculares planteados en un futuro inmediato? y ¿cuáles temas deben conformar un programa de formación de profesores en los niveles de educación básica, media básica y bachillerato?

Las respuestas a éstas y otras preguntas requieren investigar, experimentar y realizar exploraciones con docentes en servicio, futuros profesores y estudiantes que al terminar sus estudios, pueden incorporarse a la docencia en matemáticas. Los planes para la formación y actualización de profesores requieren de teoría y práctica.

Bibliografía

Cornu, B. (1999) *Training Today the Teacher of Tomorrow* In C. Hoyles, C. C. Morgan & G. Woodhouse (Eds.) Rethinking the Mathematics Curriculum, Studies in Mathematics Education Series: 10, Falmer Press, pp. 99-202

Philipp, R. A. (2007) *Mathematics teachers' beliefs and affect.* In F. K. Lester Jr. (Ed.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. NCTM, pp. 257-315.

Santillán, M. A. (2008) *Una experiencia con alumnos y maestros en formación de profesores*. Informe interno al Consejo Académico del Área de Matemáticas, CCH-UNAM.

Socas, M. (2001) *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Sowder, J. T. (2007) *The Mathematical Education and Development of Teachers*. In F. K. Lester Jr. (Ed.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. NCTM, pp. 157-223.

Wong, N. Y. (2003) *The influence of Technology on the Mathematics Curriculum* In. A. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and F. Leung (Eds.) Kluwer Academic Publishers. pp. (271-321).

[ii] La evaluación fue aaplicada a 37,706 jóvenes, de los cuales 77.8% estaba, en el momento del examen, en el bachillerato. (*La Jornada*, No. 8368. 5/XII/07, pág. 44).

[iii] Ver las notas al final del documento de estos términos y los que tienen asterisco.

[iv] Sin entrar en detalles, entendemos que la formación y actualización para profesores con varios años de servicio y los profesores de reciente ingreso, deben ser diferentes, en su temática y enfoques.

[v] Los conocimientos en matemáticas de los aspirantes a profesor son en general, malos.

RECUPERANDO LA GEOMETRÍA EN EL BACHILLERATO

Ismael Arcos Quezada
Universidad Autónoma del Estado de México
ismael_arcos@msn.com, iarcos@fi.uaemex.mx

Introducción: geometría y álgebra en el bachillerato

Es de todos sabido que, desde hace algunos meses y, a más tardar el próximo año, se estará implementando en todas las instituciones educativas del Nivel Medio Superior (NMS) del país, el Sistema Nacional de Bachillerato (SNB), pretendiéndose establecer un modelo educativo basado en competencias.

En este contexto cabe esperar una revisión exhaustiva de los contenidos de los cursos de matemáticas, una vez que han sido definidas, al menos provisionalmente, 8 competencias disciplinares básicas (es decir, obligatorias para todo egresado del NMS) en el campo disciplinar de matemáticas.

En mi opinión esta situación nos brinda una oportunidad para que la geometría recupere la importancia que le corresponde en el bachillerato. Sin embargo, si tomamos en cuenta que la gran mayoría de los docentes de matemáticas nos formamos en momentos en los que en que se privilegiaba el simbolismo del álgebra sobre la intuición y visualización más propias de la geometría, otra tarea importante será la de la capacitación de los docentes en la geometría.

Así pues, en el supuesto de que se considere necesario que la geometría sea más importante en el bachillerato, de lo que ha sido en las últimas décadas, resulta imprescindible que los docentes sean capacitados para que ello ocurra de manera que se obtengan los resultados deseados.

Por otra parte, el modelo basado en competencias plantea la necesidad de que los docentes diseñen e implementen actividades de aprendizaje para ser realizadas por los alumnos dentro o fuera del aula, algunas de las cuales tendrán que ver con la Resolución de Problemas, lo que supone el planteamiento de actividades y problemas a los alumnos, teniendo como una de sus principales características que estas resulten de interés de los alumnos.

En ese sentido, sabemos que el álgebra se ha abordado tradicionalmente en las aulas desconectada de la geometría, lo que le confiere un carácter de aridez, que difícilmente despierta el interés por parte de los alumnos.

Así, cuando se aborda en las aulas el tema de *las ecuaciones*, la mayor parte del tiempo se dedica a entrenar a los alumnos en las diferentes técnicas para obtener la solución y al uso más o menos eficiente de las herramientas operativas requeridas para ello, manifestando, como propósito básico, que el alumno sea capaz de resolver ecuaciones en el mayor número de presentaciones posibles.

De esa manera, por una parte, la solución de problemas que involucran ecuaciones pasa a ser el colofón en lugar de la parte fundamental del curso. Por otra parte, la presentación casi exclusivamente simbólica de las distintas técnicas de solución provoca que la mayoría de los alumnos no consigan el nivel de dominio esperado, y que, aquellos que presuntamente lo alcanzaron, tiendan a perderlo apenas termine el curso.

En este documento se describe parte de un documento propuesto para utilizarse en cursos de capacitación disciplinario, para profesores de matemáticas del NMS, en el que se muestra la manera en la que las ecuaciones aparecen en las matemáticas de la Grecia antigua, pretendiendo con ello que el docente observe que las ecuaciones pueden abordarse desde una perspectiva totalmente distinta a la tradicional, ya que los matemáticos griegos no disponían de la simbología algebraica con la que contamos ahora, ni siquiera en su forma más rudimentaria. Las ecuaciones y su solución aparecían siempre en un contexto geométrico.

En buena medida, la idea central del trabajo está tomada del artículo de Asger Aaboe titulado: *Las matemáticas griegas y la construcción euclidiana del pentágono regular*, y consiste en exponer algunas de las proposiciones de *Los Elementos* de Euclides que conducen a la construcción del pentágono regular. Este ejercicio resulta muy didáctico, ya que en el camino aparecen conceptos y proposiciones geométricas que muchos docentes desconocen, debido a que buena parte de la geometría que formaba parte de la matemática escolar, a mediados del siglo pasado, se eliminó entre los 60 y los 70.

Es importante mencionar que, debido a que está dirigido a docentes del NMS, no se pretende hacer un tratamiento riguroso, sino más bien mover a los profesores a la reflexión acerca de su trabajo dentro y fuera de las aulas, por lo cual, con la lectura del texto se intercalan algunas actividades. A continuación se muestran algunas partes del documento, en la primera de las cuales se aborda la construcción del pentágono desde la perspectiva del álgebra.

Construcción del pentágono regular y la razón áurea

En el contexto del álgebra (escolar) actual, resolver una ecuación (en una variable x) significa encontrar el valor (o conjunto de valores) que satisfacen la igualdad, lo cual se consigue transformando, sucesivamente, la ecuación dada en otra equivalente, hasta obtener una o más igualdades de la forma $x = r_n$, siendo cada uno de los r_n, uno de los valores buscados de la variable x.

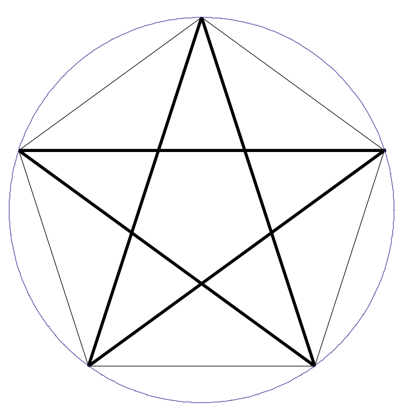


Figura 1: Pentágono regular.

En cambio, en el álgebra geométrica de Los Elementos, en alguna proposición se puede plantear, por ejemplo, el problema de la construcción de un segmento que satisfaga determinada condición. En tal caso se buscará como obtener el segmento, a partir de un conjunto de datos y de la condición dada, utilizando para ello sólo regla y compás.

Uno de los problemas de construcción con regla y compás, que más llamaron la atención de los matemáticos griegos, fue el de la construcción del pentágono regular. Además, entre los pitagóricos, el pentágono resultaba especialmente importante, entre otras cosas porque a partir de él se construía su figura emblemática: el pentacle, pentalfa o pentagrama místico (figura 1), que es la poligonal que resulta de prolongar los lados de un pentágono regular, o bien de unir los vértices del mismo por medio de sus diagonales.

Antes de estudiar las proposiciones de Los Elementos relacionados con este problema, vamos a abordar el problema desde una perspectiva actual. Para ello, observemos primeramente que, si se obtuviera el trazo de un decágono regular, es decir, del polígono regular de 10 lados, el problema estaría resuelto, ya que sólo habría que unir los vértices del decágono, de dos en dos, para obtener el pentágono (ver figura 3, derecha).

Supongamos, ahora, que AB (figura 2) es uno de los lados del decágono regular, inscrito en la circunferencia con centro en O y radio r. En tal caso el ángulo BOA será $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ y el triángulo OAB será isósceles, de manera que cada uno de los ángulos ABO y OAB será de 72º, tal como se indica en la figura. Así pues, se trata de construir (con regla y compás) un ángulo de 36º.

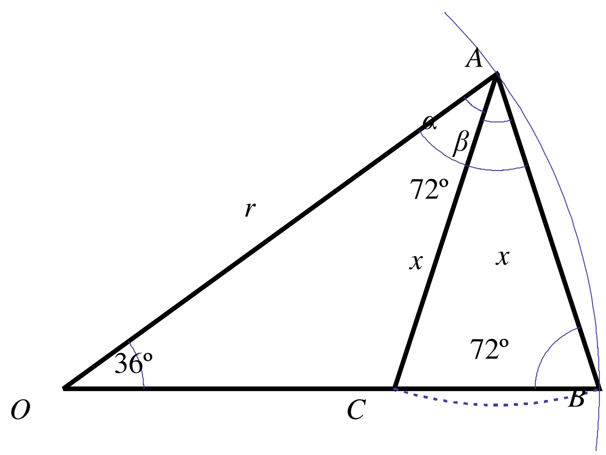


Figura 2: Construcción de un decágono regular.

Para ello, siendo x el lado del decágono, obtengamos la relación existente entre x y r, de tal manera que podamos construir el segmento x, a partir del segmento r. Así pues, con referencia a la figura 2, con centro en A y radio $AB = x$, tracemos un arco que intersecará a OB en el punto C. Tal construcción garantiza que el triángulo ABC es isósceles, ya que $AC = AB = x$ y el ángulo β será de 36º y, por lo tanto, α también, así que el triángulo OCA también es isósceles y $OC = CA = x$.

Por otra parte, $CB = OA - OC = r - x$, y los triángulos *OBA* y *ACB* son semejantes (sus ángulos correspondientes son iguales), de manera que:

$$\frac{BA}{OB} = \frac{CB}{AC}$$

Es decir: $\frac{x}{r} = \frac{r-x}{x}$

De donde: $x^2 = r^2 - rx$

$$x^2 + rx - r^2 = 0$$

Al resolver esta ecuación (cuadrática) para *x*, obtenemos:

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2}}{2} = \frac{-r \pm r\sqrt{5}}{2}$$

Ya que *x* es una longitud, no puede ser negativa, de manera que la relación buscada debe ser:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, r \qquad (x \cong 0.618\, r)$$

Así pues, la longitud del lado del decágono regular es, aproximadamente, 0.618 veces el radio de la circunferencia en la que habrá de inscribirse.

El recíproco de esta razón será entonces la existente entre el radio de una circunferencia y el lado del decágono regular inscrito en la misma, y también será la razón entre la diagonal y el lado de un pentágono regular. Tal número se denota actualmente por medio de la letra griega ϕ, y ha sido objeto de fascinación de muchos matemáticos a lo largo de la historia, y ha teniendo gran influencia en el arte, denominándose por ello: razón dorada o *razón áurea*. Así pues:

$$\phi = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cong 1.618$$

Pues bien, conociendo la razón existente entre el radio y el lado del decágono, podemos justificar la construcción del pentágono como se describe a continuación (ver figura 3).

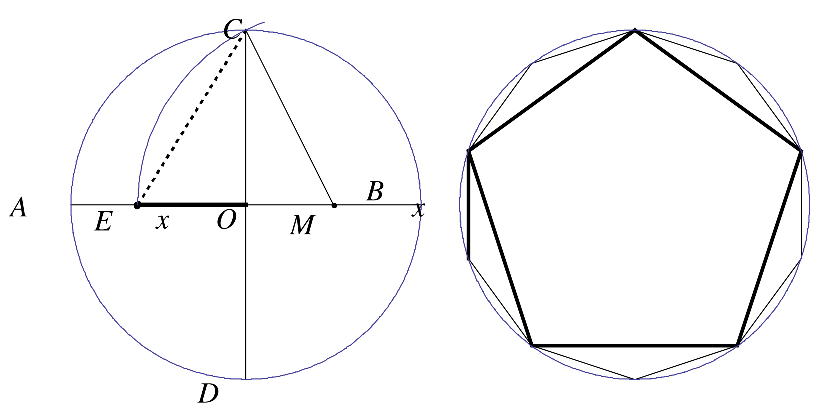


Figura 3: Construcción de un pentágono regular.

Consideremos la circunferencia con centro en O y radio $r = OC$. Tracemos el diámetro CD y, enseguida, el diámetro AB, siendo perpendicular al primero. Ahora ubiquemos, sobre el diámetro

AB, el punto M, siendo el punto medio del radio OB. Finalmente, con centro en M y radio MC, tracemos un arco que cortará al diámetro AB en el punto E. El segmento EO es la medida del lado del decágono buscado, de manera que sólo habrá que trasladarlo con el compás sobre la circunferencia para trazar el decágono, hecho lo cual el pentágono podrá trazarse al unir los vértices del decágono, de dos en dos, tal como se indica en la figura 3 (derecha).

Para probar que con tal construcción el segmento EO, es, en efecto, la longitud del lado del decágono inscrito en la circunferencia, observemos que $OC = r$ y $OM = \frac{1}{2}r$, de manera que:

$$MC = \sqrt{OM^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}r$$

Por lo tanto:

$$x = EO = EM - OM = MC - OM = \frac{\sqrt{5}}{2}r - \frac{1}{2}r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$$

Lo que prueba, de acuerdo con lo arriba discutido, que $x = EO$ es la longitud del lado del decágono regular, inscrito en la circunferencia de radio $r = OC$.

Con referencia a la razón áurea, se incluyen algunas actividades, una de las cuales es la siguiente:

> **Actividad**. En Livio (p. 81) se cita un poema titulado *Constantly mean* (algo así como: *Refiriéndose constantemente a*), escrito por Paul S. Bruckman, en donde el autor escribe "Golden mean" para referirse a la razón áurea. El primero de los versos del poema dice:
>
> *The golden mean is quite absurd;*
> *It's not your ordinary surd,*
> *If you invert it (that is fun!),*
> *You'll get itself, reduced by one;*
> *But if increased by unit,*
> *It yields its square, take it from me.*
>
> a). Probar lo indicado en las líneas tercera y cuarta, es decir, que el recíproco de ϕ es la razón misma, reducida en la unidad.
>
> b). Probar lo indicado en las líneas quinta y sexta, es decir, que si ϕ se aumenta en la unidad, se obtiene su cuadrado.

Una vez que se ha abordado el asunto de la razón áurea, desde el punto de vista algebraico, se inicia el estudio de algunas de las proposiciones de Los Elementos, comenzando con aquellas que proporcionan un método para la construcción de la razón áurea mediante regla y compás.

La media proporcional y la razón áurea

Veamos ahora dos proposiciones de *Los Elementos*. Ambas son muestras del Álgebra Geométrica, pero la segunda, además, nos permite observar otro acercamiento más al número ϕ, es decir, a la razón áurea.

Proposición II.6. *Si se divide una línea en dos y se le añade en otra recta cualquiera, el rectángulo comprendido por la recta entera más la añadida y por la añadida, junto con el cuadrado de la línea mitad, es igual al cuadrado de la línea compuesta de la línea mitad y de la añadida.*

A *G* *B* *D*

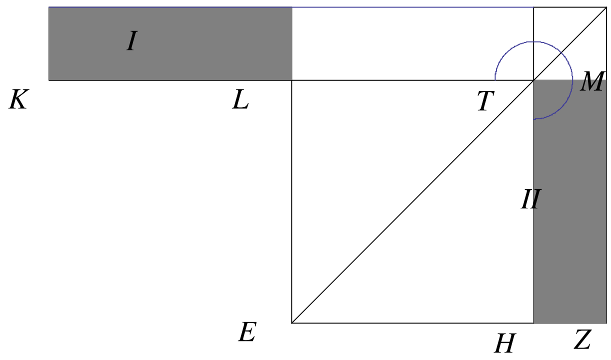


Figura 4

Así pues, con referencia a la figura 4, supongamos la línea (es decir, el segmento) *AB*, que es dividida en dos por el punto *G* (es decir, *G* es el punto medio de *AB*), y que a tal línea se le añade la recta (es decir, el segmento) *BD*.

Tracemos ahora, desde *A*, la perpendicular *AK*, de manera que $AK = BD$ y completemos el rectángulo *AKMD*. Enseguida, sobre *AK* se localizan los puntos *L* y *T*, que son las proyecciones perpendiculares de *G* y *B*, sobre *AK*. Finalmente, sobre *LT* constrúyase el cuadrado *LEHT* y trácense el rectángulo *THZM*, con lo que se completa el cuadrado *GEZD*, y la diagonal *ED*, de este último cuadrado.

De esta manera, "el rectángulo comprendido por la recta entera más la añadida y por la añadida" será el rectángulo *AKMD*, cuya área es $AK \cdot AD$, y "el cuadrado de la línea mitad" es el cuadrado *LEHT*, cuya área es $LT^2 = GB^2$. Por otra parte, "el cuadrado de la línea compuesta de la línea mitad y la añadida" será el cuadrado *GEZD*, cuya área es $GE \cdot GD$.

Ahora bien, si consideramos el polígono *AKLEZDA*, tendremos por un lado que:

Polígono *AKLEZDA* $-$ Rectángulo *II* $=$ Cuadrado *LEHT* $+$ Rectángulo *AKMD*

$=$ cuadrado de la línea mitad

$+$ el rectángulo comprendido por la recta entera más la añadida y por la añadida

Y, por otra parte, que:

Polígono *AKLEZDA* $-$ Rectángulo *I* $=$ Cuadrado *GEZD*

$=$ cuadrado de la línea compuesta de la línea mitad y la añadida

Así pues, si se prueba que los rectángulos *I* y *II* son iguales, se estará probando la proposición 6.

La prueba de ello es muy simple, ya que, al considerar la diagonal *ED*, del cuadrado *GEZD*, tendremos, por la proposición I.43,[vi] que el rectángulo *THZM*, es decir, el rectángulo *I* es igual al rectángulo *GLTB*, pero éste, a su vez, es igual al rectángulo *AKLG*, es decir, al rectángulo *II*, ya que tienen la misma base ($AG = GB$) y la misma altura.

Observemos que, en este caso, fue más difícil dar una interpretación al texto de la proposición que probarla. Ahora veamos otra proposición directamente relacionada con la razón áurea.

Proposición II-11. *Dividir una recta de modo que el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de las partes sea igual al cuadrado de la parte restante.*

Sea *AB* el segmento dado (ver figura 5), se desea ubicar el punto *T*, en el mismo, tal que:

$$AB \cdot TB = AT^2$$

Que también puede escribirse:

$$\frac{AB}{AT} = \frac{AT}{TB}$$

Antes de ver la construcción propuesta por Euclides, veamos la interpretación algebraica de la proposición, con el simbolismo algebraico actual.

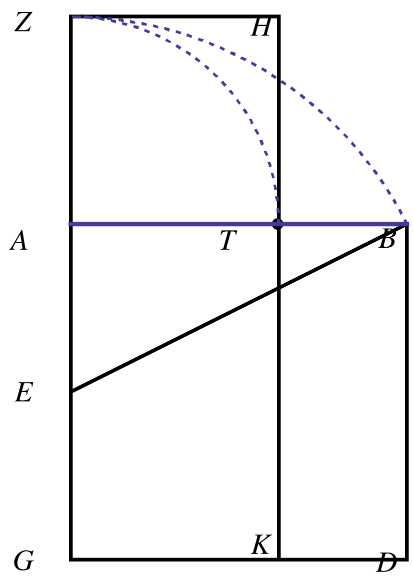


Figura 5

Si $AB = a$ y $AT = x$, tenemos que, de acuerdo con la ecuación $\frac{AB}{AT} = \frac{AT}{TB}$, x debe satisfacer la ecuación: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$

Es decir: $a^2 - ax = x^2$

O bien: $x^2 + ax - a^2 = 0$

Que, según hemos visto, nos conduce a la solución:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\phi}$$

Así pues, vemos que la construcción del segmento que divide a otro en la misma razón en la que ese otro divide al segmento suma, también esta relacionado con la razón áurea. Veamos ahora la construcción propuesta por Euclides:

Dado el segmento *AB*, tenemos que ubicar sobre el mismo, el punto *T* tal que $AB \cdot TB = AT^2$. Para ello se siguen los pasos siguientes:

P1. Por *A* se traza la recta *L*, perpendicular a *AB*.

P2. Con centro en *A*, y radio *AB*, se traza un arco que corta a *L* en el punto *G* y se completa el cuadrado *AGDB*.

P3. Se localiza *E*, punto medio de *AG*.

P4. Con centro en *E*, y radio *EB*, se traza un arco que corta a *L* en el punto *Z*.

P5. Con centro en *A*, y radio *AZ*, se traza un arco que corta a *AB* en el punto *T*, el cual cumple la condición propuesta.

La prueba es como sigue:

Por la proposición II.6, y siendo *AZ* la recta añadida a *GA*, la cual se divide en dos en el punto *E*, tenemos entonces que:

$$GZ \cdot AZ + AE^2 = EZ^2$$

Pero, por construcción, tenemos que $GA = AB$, $AZ = AT$, $GZ = GA + AZ = AB + AT$, y $EZ = EB$, por lo tanto:

$$(AB + AT) \cdot AT + AE^2 = EB^2$$

$$AB \cdot AT + AT^2 + AE^2 = EB^2 \qquad (1)$$

Además, por el teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo rectángulo *EAB*, tenemos que:

$$EB^2 = AE^2 + AB^2$$

Así que la ecuación (1) queda:

$$AB \cdot AT + AT^2 + AE^2 = AE^2 + AB^2$$

O bien: $AB \cdot AT + AT^2 = AB^2$

Esta igualdad, de acuerdo con la figura, equivale a:

Rectángulo *GKHZ* = Cuadrado *AGDB*

Podemos entonces restar el área común, es decir, el rectángulo *GKTA*, para obtener:

Cuadrado *ATHZ* = Rectángulo *KDBT*

Es decir: $AT^2 = TB \cdot AT$

Con lo cual se prueba que la construcción es correcta.

La trisección del ángulo desde una perspectiva actual

Para terminar, incluyo a continuación una actividad para los docentes que consiste en abordar, desde una perspectiva del álgebra escolar actual, el problema de la trisección del ángulo.

La trisección del ángulo. Los matemáticos griegos plantearon y resolvieron una buena cantidad de problemas de construcción con regla y compás, sin embargo, algunos de los problemas planteados se quedaron sin resolver (ver el capítulo III de *¿Qué son las matemáticas?*). Uno de estos es el de la trisección del ángulo, que consiste en que, a partir de un ángulo dado, debe construirse otro cuya medida sea exactamente la tercera parte de la del ángulo dado.

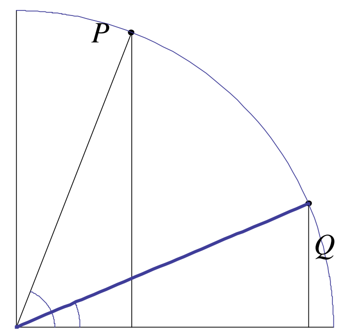


Figura 6

Decir que este problema quedó sin resolver significa que no se resolvió con apego total al requisito de usar sólo regla y compás. Sin embargo, Arquímedes, por ejemplo, dio una solución “con trampa”, que requiere el uso de algo más que la regla (no graduada) y el compás.[vii]

En el contexto del álgebra escolar actual, el problema podría verse como sigue (ver figura 6): dado un ángulo $\theta = 3\phi$, construir el ángulo $\frac{\theta}{3} = \phi$. Eso quiere decir que, si vemos los ángulos como centrales en una circunferencia unitaria, a partir del segmento *OA* se debe construir el segmento *OB*.

Así pues, observando que $OA = \cos 3\phi$ y que $OB = \cos\phi$, entonces, desde la perspectiva del álgebra, buscamos expresar *OB* en términos de *OA*. Es decir, si $OA = a$ y $OB = x$, queremos una expresión para *x* en términos de *a*.

Como $OA = a = \cos 3\phi$ y $OB = x = \cos\phi$, entonces de lo que se trata es de escribir el coseno de un ángulo en términos del coseno de su triple. Aplicando algunas identidades, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\cos 3\phi &= \cos(2\phi + \phi) = \cos 2\phi \cos\phi - \operatorname{sen} 2\phi \operatorname{sen}\phi \\
&= (2\cos^2\phi - 1)\cos\phi - (2\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\operatorname{sen}\phi \\
&= 2\cos^3\phi - \cos\phi - 2\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi \\
&= 2\cos^3\phi - \cos\phi - 2(1 - \cos^2\phi)\cos\phi \\
&= 2\cos^3\phi - \cos\phi - 2\cos\phi + 2\cos^3\phi \\
\cos 3\phi &= 4\cos^3\phi - 3\cos\phi
\end{aligned}$$

Es decir: $a = 4x^3 - 3x$

O bien: $4x^3 - 3x - a = 0$

Esta es una ecuación cúbica a partir de la cual, estrictamente, no podemos despejar a *x* en términos de *a*. Sin embargo, aprovechando que estamos situados, no en la Grecia antigua ni en el Renacimiento, sino en el siglo XXI, podemos recurrir a un paquete computacional con manipulación simbólica. Por ejemplo, usando *Mathematica*, pedimos la solución de la ecuación para *x*, como sigue:

$$\text{Solve}[4x^3 - 3x - a == 0, x]$$

Obteniendo como respuesta:

$$\{\{x \to \frac{1}{2\left(a+\sqrt{-1+a^2}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2}\left(a+\sqrt{-1+a^2}\right)^{\frac{1}{3}}\},$$

$$\left\{x \to -\frac{1+i\sqrt{3}}{4\left(a+\sqrt{-1+a^2}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{4}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(a+\sqrt{-1+a^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\},$$

$$\{x \to -\frac{1-i\sqrt{3}}{4(a+\sqrt{-1+a^2})^{1/3}} - \frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})(a+\sqrt{-1+a^2})^{1/3}\}\}$$

Escogiendo —por más sencilla y, aparentemente, con valores reales— la primera de las tres raíces, definimos la función para el coseno del ángulo tercio mediante:

$$\text{cat1}[\text{a\_}] := \frac{1}{2(a+\sqrt{-1+a^2})^{1/3}} + \frac{1}{2}(a+\sqrt{-1+a^2})^{1/3} \qquad (2)$$

Así pues, esta expresión nos estará dando el valor exacto del coseno de la tercera parte del ángulo cuyo coseno es *a*. Para probar su validez tomemos $\theta = 3\phi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$, de manera que $a = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. La tercera parte de 60º es 20º, así que la función antes definida nos dará, para $a = \frac{1}{2}$, el coseno de 20º. Recurriendo nuevamente a *Mathematica* pedimos el valor de la función correspondiente a $a = \frac{1}{2}$, obteniendo:

$$\text{c20g} = \text{cat1}[1/2]$$

$$\frac{1}{2(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})^{1/3}} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})^{1/3}$$

No se ve para nada claro que esta expresión corresponda al valor (exacto) del coseno de 20º. Para cerciorarnos pedimos el valor aproximado:

N[c20g]

$0.9396926207859084 + 0.\,i$

Finalmente, para comparar, pedimos el valor aproximado del coseno de 20º, obteniendo:

N[Cos[20Degree]]

0.9396926207859084

Así pues, la ecuación (2) sí proporciona la solución buscada.

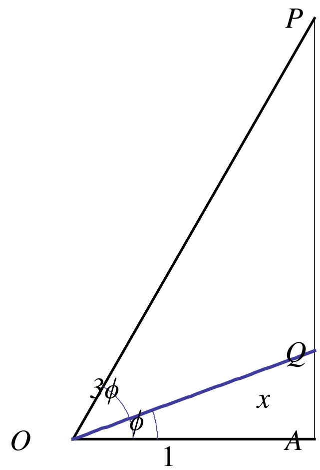


Figura 7

Abordemos ahora el problema de otra manera (ver figura 7). Si *OA* es un segmento unitario fijo, *AP* es perpendicular a *OA* y $\theta = 3\phi$ es el ángulo cuya tangente es *AP*, entonces el problema consiste en encontrar el punto *Q*, sobre *AP*, tal que $\tan\frac{\theta}{3} = \tan\phi = AQ$. Así pues, si $AP = a$ y $AQ = x$, se trata, nuevamente, de expresar *x* en términos de *a*. Queda como ejercicio probar que, en este caso, la ecuación que satisface *x* es:

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$$

Comentario final

Cuando se habla de formación docente normalmente se hace referencia a dos aspectos, el disciplinario y el pedagógico-didáctico. En el primer caso se busca, por lo general, que el docente profundice en el conocimiento de la disciplina, digamos, de una manera “vertical”. Desde esa perspectiva, por ejemplo, un profesor de álgebra de bachillerato debería aprender sobre algunos tópicos de álgebra moderna o álgebra lineal.

Desde mi punto de vista, hace falta, en la formación disciplinaria, abordar aspectos históricos y reflexionar acerca de la importancia de determinadas actividades para el desarrollo de las competencias matemáticas de los alumnos, lo que, a su vez, es una competencia del docente.

Bibliografía

Aaboe, A. (1986). Las matemáticas griegas y la construcción euclidiana del pentágono regular. *Mathesis*, Vol. II, No. 3, 353-396.

Courant, R., Robbins, H. (2002) *¿Qué son las matemáticas*? (La versión original, en inglés, es de 1941, de la cual se hizo una revisión, en 1996, que incluye Prefacio y Avances recientes por Ian Stewart. La edición consultada es la traducción al español de la edición revisada). México: Fondo de Cultura Económica.

Euclides, (1992). *Elementos de Geometría*, libros I y II. (Versión de Juan David García Bacca). México: UNAM.

Euclides, (1992). *Elementos de Geometría*, libros III, IV y V. (Versión de José Álvarez Laso). México: UNAM.
Euclides, (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*, Vol. 3, libros X a XIII. (Versión de Thomas L. Heath). Estados Unidos de América: Dover.
González Urbaneja, P. (2001). *Pitágoras El filósofo del número.* España: Nivola.
Livio, M. (2002). *The Golden Ratio*. New York: Broadway Books.

[vi] La proposición I-43 dice que: «En todo paralelogramo, los complementos de los paralelogramos alrededor del diámetro son iguales entre sí».
[vii] Al respecto consúltese a Courant y Robbins.

UN ESTUDIO SOBRE EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN Y SEGUIMIENTO DE CONJETURAS GEOMÉTRICAS A TRAVÉS DEL USO DE SOFTWARE DINÁMICO

David Benítez Mojica
Universidad Autónoma de Coahuila
dbenitez@mail.uadec.mx

Este estudio documenta el razonamiento matemático que emerge en el proceso construcción y seguimiento de conjeturas con apoyo de software dinámico. El interés central del trabajo que aquí se reporta, es analizar las preguntas que conllevan a la formulación de una conjetura y los tipos de argumento utilizados para validar esa conjetura. En el artículo, la solución de un problema sirve de plataforma para examinar la viabilidad y la pertinencia de una conjetura en términos de usar el software para identificar la conjetura visualmente, examinar si la conjetura falla dentro de una familia de objetos isomórficos (prueba de arrastre), construir una macro que reproduce la construcción y verificar si la conjetura se mantuvo en objetos generados por la macro-construcción, cuantificar y verificar las propiedades de objetos matemáticos para detectar patrones, y presentar argumentos formales para probar la conjetura que emerge en los pasos anteriores. Este trabajo se enmarca en la línea de actualización y formación de maestros de matemáticas del nivel medio superior.

INTRODUCCIÓN

Formular conjeturas y desarrollar argumentos matemáticos para apoyarlas son actividades fundamentales en la práctica matemática. Harel & Sowder (1998) reconocen, la importancia que tiene para el aprendizaje, participar en el proceso de la construcción de conjeturas y la necesidad a buscar argumentos convincentes para validarlas.

> La meta [de la enseñanza] es de ayudar a los estudiantes a refinar su propio concepto de lo que constituye una justificación en las matemáticas: desde una concepción que es altamente dominada por la percepción, manipulación simbólica y formal de la prueba, hasta una concepción que está basada en intuiciones, convicciones y necesidades (p. 237).

En este contexto es importante examinar el papel que juega el uso de herramientas específicas para ayudar a representar los objetos matemáticos. ¿Qué tipo de preguntas los estudiantes pueden formular y explorar cuando representan objetos matemáticos con el uso de la tecnología computacional? ¿Qué aspectos del pensamiento matemático mejoran cuando los estudiantes utilizan herramientas de computación en sus experiencias de aprendizaje matemático? Estas son preguntas relevantes que se necesitan discutir al evaluar el potencial real de una herramienta particular para ayudar a estudiantes a construir su conocimiento matemático de forma importante. Se reconoce que diferentes herramientas computacionales pueden ofrecer oportunidades distintas a los estudiantes para identificar, representar y explorar relaciones y propiedades de objetos matemáticos. Entonces, cuando se utiliza una herramienta que es importante para investigar las funciones del pensamiento matemático y las formas de razonar que los estudiantes pueden desarrollar como resultado de representar y examinar problemas matemáticos con el uso de tecnología computacional. En particular, el uso de software dinámico (Geogebra) parece facilitar el proceso de buscar conjeturas o relaciones matemáticas integradas a los objetos y problemas que pueden representarse dinámicamente.

Bajo esta perspectiva, el interés central del artículo es documentar el razonamiento matemático que se construye en el proceso construcción y seguimiento de conjeturas con apoyo de software dinámico.

¿Qué tipos de representaciones de los objetos o de los problemas matemáticos se pueden emplear en la resolución de problemas con apoyo de software dinámico? ¿Qué recursos y estrategias heurísticas y de control se pueden utilizar durante el proceso de buscar relaciones o invariantes matemáticos integrados en las representaciones de un problema? ¿Qué tipo de argumentos y emergen como resultado de una exploración sistemática con apoyo del software dinámico? En el presente artículo se argumenta que el uso de software dinámico no solo ayuda a los estudiantes a cuantificar y explorar los atributos matemáticos de los objetos, también influye en el razonamiento o el pensamiento del resolutor sobre el apoyo y la presentación de relaciones o conjeturas.

REFERENTES TEÓRICOS

El desarrollo de conocimiento y aprendizaje matemático puede rastrearse en términos del tipo de representaciones utilizadas para pensar en matemáticas. "Mucho de la historia de las matemáticas se trata de crear y refinar sistemas representacionales, y mucho de la enseñanza de las matemáticas de cómo los estudiantes aprenden a trabajar con ellos y resolver los problemas con los mismos" (Lesh, Landau, and Hamilton, 1993, cited in Goldin & Shteingold, 2001, p.4). En este contexto, argumentamos que las representaciones dinámicas (generadas con el uso de la tecnología) de objetos o problemas matemáticos, ofrecen a los estudiantes la posibilidad de detectar y examinar modelos o invariantes que emergen mientras que se está cuantificando atributos matemáticos (longitudes, perímetro, área, volumen, ángulo, inclinación, etc.) y moviendo objetos particulares (puntos, segmentos, mediatrices, etc.) dentro de la representación. Además, reconocimos que el ambiente de resolver un problema proporciona condiciones de aprendizaje para estudiantes a participar activamente en la construcción de su propio conocimiento matemático y conceptualizar su aprendizaje matemático como un proceso continuo donde el uso de herramientas tecnológicas se considera como su oportunidad para explorar y examinar problemas o conjeturas desde ángulos distintos. Aquí, algunas preguntas o conjeturas que muchas veces son difíciles de verificar con procedimientos de pluma y papel que ahora se pueden explorar vía el uso de herramientas tecnológicas. Como consecuencia, con el uso de diferentes herramientas, los estudiantes pueden ser capaces de identificar no solo nuevas relaciones o conjeturas, pero también diferentes maneras para apoyarlas. Una idea general que alumnos necesitan desarrollar mientras utilizan herramientas tecnológicas es que cualquier conjetura o relación que emerge durante su interacción con la tarea necesita apoyarse con un argumento claro matemático. En este contexto, es importante reconocer no solo el tipo de oportunidades que el uso de la tecnología puede proporcionar a los estudiantes, pero también los retos que necesitan resolver cuando presentan sus resultados a la comunidad de aprendizaje. Como lo indicó Schoenfeld:

> Para el matemático, la dependencia de la argumentación como forma de descubrimiento es un comportamiento aprendido, una función de pericia. ..Conforme uno se adentra en las matemáticas, se hace normal trabajar bajo estos términos. "Pruébemelo" significa "explícame por qué es verdadero," y la argumentación se hace una forma de explicación, un medio de transportar el entendimiento (Schoenfeld, 1985, p. 172).

Una función relevante que emerge en las formas de estudiantes de representar problemas matemáticos con el uso de tecnología es la posibilidad de rastrear “ciclos de modelaje” donde su descripción de conjeturas, explicaciones y predicciones se refinan, revisan o rechazan gradualmente – basados en la retroalimentación de pruebas de verificación.

Benítez y Santos (2006) reportan un proceso de construcción y formulación de conjeturas matemáticas con apoyo de software dinámico. En el presente artículo se utiliza las mismas fases de la metodología de trabajo para resolver un nuevo problema.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Sea AB un segmento su punto medio R, se trazan las rectas L1 y L2 perpendiculares a AB, por los puntos A y B, respectivamente, y L la mediatriz a AB.

Figura 1: Construyendo el sistema de rectas.

Sobre la recta L2, se ubican, de manera arbitraria, los puntos P y Q. Se trazan los simétricos de P y Q (P´ y Q´) con respecto a la recta mediatriz.

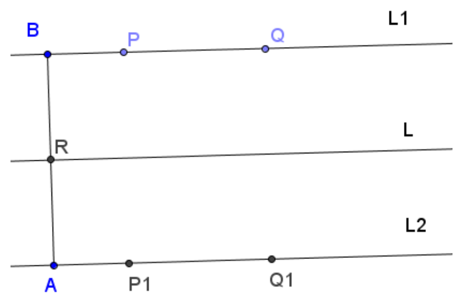


Figura 2: Trazando los puntos sobre las rectas.

Por los puntos R, P, Q, Q1 y P1, se traza una cónica. ¿En dónde se debe ubicar P y Q de tal manera que la cónica resultante sea una circunferencia?

DISEÑO DE ESTRATEGIAS PARA ATACAR EL PROBLEMA

Para resolver este problema, se utilizarán dos estrategias heurísticas:

Estrategia 1. Estudio de casos especiales. Para facilitar la búsqueda de relaciones, se trabajará con segmentos AB de longitud entera. Además, el punto Q se ubicará de tal manera que el segmento BQ sea un múltiplo entero de AB.

Estrategia 2. Pensar hacia atrás. El principio básico de esta estrategia es pensar que el problema si tiene solución y retornarse para encontrar los elementos y relaciones clave que dan solución al problema. Teniendo el punto Q fijo, se harán construcciones con regla y compás para trazar una circunferencia que pase por Q, Q´ y R. Se determinará P en el corte entre tal circunferencia y L2.

Estrategia 3. Considerar parte de la hipótesis. Sea AB un segmento su punto medio R, se trazan las rectas L1 y L2 perpendiculares a AB, por los puntos A y B, respectivamente, y L la mediatriz a AB. Sobre L1 se ubica un punto Q y se construye Q´, como el punto simétrico de Q con respecto a L. Se trata el triángulo QRQ´ y se exploran sus propiedades

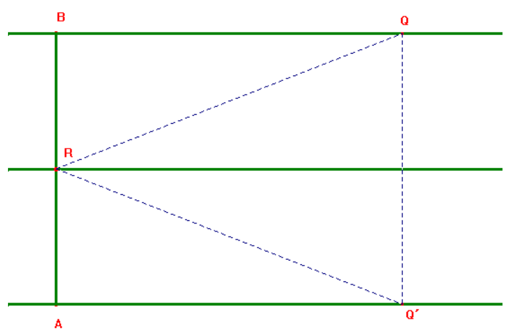


Figura 3: Identificando visualmente las relaciones para construir una conjetura.

Se construye la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. El circuncentro del Triángulo RQQ´, se encuentra en el corte de las mediatrices. Para hallarlo, y se encuentra el punto C que es la intersección de la mediatriz RQ con la recta L.

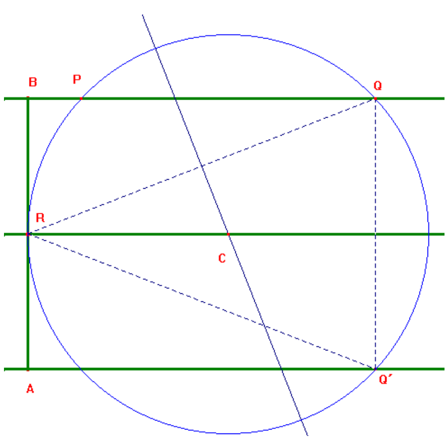


Figura 4: Encontrando la ubicación del punto P.

Se encuentra el punto P como la intersección entre L2 y la circunferencia. Posteriormente, se puede utilizar una combinación de las estrategias 1,2 y 3 para intentar encontrar relaciones entre las medidas de los segmentos AB, BP y BQ.

DIFERENTES TIPOS DE ACERCAMIENTO A LA CONSTRUCCIÓN DE LA CONJETURA

En esta sección se describen los razonamientos que emergen de una metodología de trabajo en el proceso de construcción de conjeturas geométricas con el apoyo de software dinámico. En este proceso se distinguen varias fases o etapas las cuales se describen a continuación.

5.1. Aproximación numérica a la conjetura

En esta etapa se utilizan las tres estrategias, anteriormente descritas, para intentar establecer una relación entre la medida de los segmentos AB, BP Y BQ. En este proceso, se realizará una construcción con apoyo del software dinámico (Geogebra) y se registrarán las medidas en una tabla. El propósito central en esta fase, es cuantificar y verificar las propiedades de los segmentos para detectar patrones.

Primero se usa un segmento AB de 4 cm de longitud y después se hará variar la longitud de dicho segmento.

AB	BQ	BP
4	4	1
4	8	0.5
4	12	0.3333
4	16	0.25

Tabla 1: Buscando relaciones numéricas

En todos estos casos se puede observar que BQ×BP = 4. Esto puede ser el inicio de una conjetura. Para darle seguimiento, se trabajará con otras longitudes del segmento AB.

AB	BQ	BP	BQ×BP
6	6	1.5	9
8	8	2	16
10	20	1.25	25
12	24	1.5	36

Tabla 2: Encontrando patrones numéricos

Los resultados de la cuarta columna de la tabla anterior, son números cuadrados $9=3^2$,$16=4^2$, $25=5^2$ y $36=6^2$. A partir de estos resultados se puede establecer la siguiente conjetura:

Conjetura 1: Sea AB un segmento, su punto medio R, se trazan las rectas L1 y L2 perpendiculares a AB, por los puntos A y B, respectivamente, y L la mediatriz a AB. Sobre la recta L2, se ubican los puntos P y Q. Se trazan los simétricos de P y Q (P´ y Q´) con respecto a la recta mediatriz. Por los puntos R, P, Q, Q´ y P´, se traza una cónica.

La cónica es una circunferencia si y solamente si $\overline{BP}\times\overline{BQ}=\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2$

5.2. Aproximación visual a la conjetura

En esta fase se hace una reinterpretación geométrica de las relaciones encontradas en el acercamiento numérico.

En la sección anterior se realizó una construcción bajo las condiciones del problema. Se encontró que si se traza un punto Q (libre) el punto P (buscado), debe ser tal que el área de un rectángulo de lados BP=DD y BQ, sea igual al área de un cuadrado de de lado $BR=\frac{AB}{2}$. Veamos la siguiente figura:

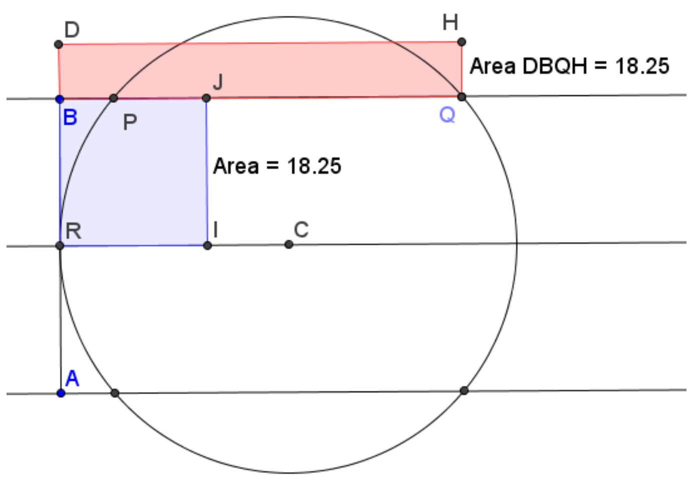


Figura 5: Aproximación visual a la conjetura.

Para el ejemplo que se está desarrollando en el presente artículo, primero se hizo una aproximación numérica y luego una visual a las relaciones fundamentales entre los objetos matemáticos para establecer patrones y construir conjeturas. Existen ejemplos donde primero se hace una aproximación visual y luego una numérica.

5.3. Prueba del arrastre

Se arrastran los objetos libres de la construcción dinámica, con el propósito de examinar si la conjetura falla, dentro de una familia de objetos isomórficos. Para el ejemplo que se está desarrollando, se pueden mover los puntos A,B y Q y se le da seguimiento al cumplimento de la conjetura en versión visual. Es decir, se moverán los puntos libres y se explorará si se cumple la igual entre las áreas del rectángulo de las $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$, y del cuadrado de lado $\frac{\overline{AB}}{2}$.

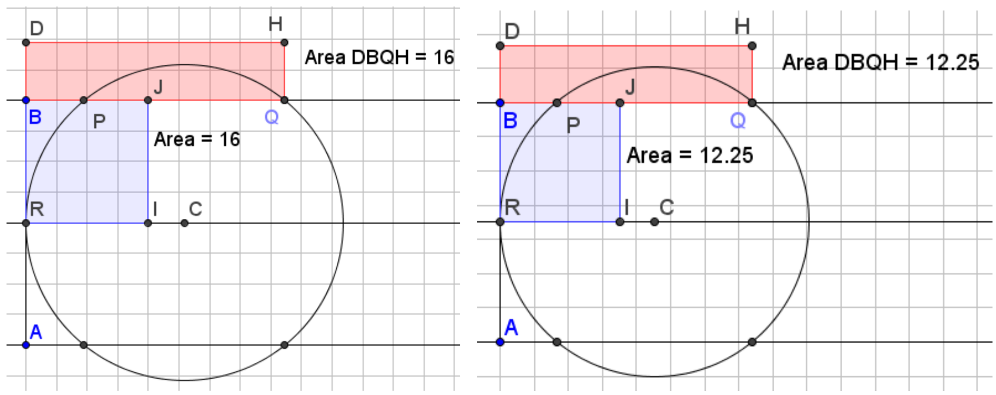


Figura6: Arrastrando los objeto libres de la construcción

En la Fig.6., se observa que con apoyo del software dinámico, se pueden una amplia colección de figuras, para explorar si la conjetura se cumple en una amplic colección de figuras.

Macro-Construcción

En esta sección se presenta una solución al problema, usando procedimientos de regla y compás. En la parte final se construye una macro-construcción, con el propósito de darle seguimiento a la conjetura propuesta en las secciones anteriores.

Partimos de un segmento AB, su punto medio R y el sistema de paralelas L1, L2 y L3. Se construye un punto Q, sobre L2 y se propone la construcción (con regla y compás) de un punto P de tal manera que P. Q y R sean concíclicos.

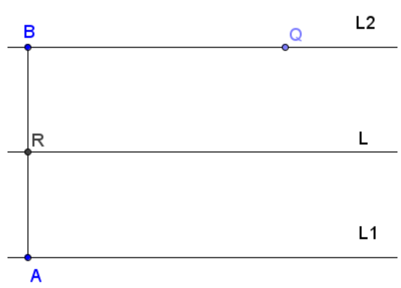


Figura 7: Proponiendo una solución con regla y compás.

En las secciones anteriores se conjeturó que en la configuración propuesta en el problema, la solución se encuentra cuando los puntos P y Q satisfacen la siguiente relación:

$$\overline{BP}\times\overline{BQ}=\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2$$

En este caso la ubicación de los puntos A,B y Q es conocida, se pretende diseñar un procedimiento con regla y compás que permita encontrar el punto P, de tal manera que satisfaga la relación anterior.

(a) Con regla y compás, se encuentra un segmento de longitud $\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2$. Se traza un par de rectas perpendiculares. Al punto de intersección entre estas rectas lo llamamos B. Se construyen los segmentos $\overline{BT}=\overline{BR}=\frac{\overline{AB}}{2}$.Se traza el segmento $\overline{BM}$= 1. Se une M con R y se traza una paralela a MR que pase por T. Esta recta cortará a la prolongación de BR en S.

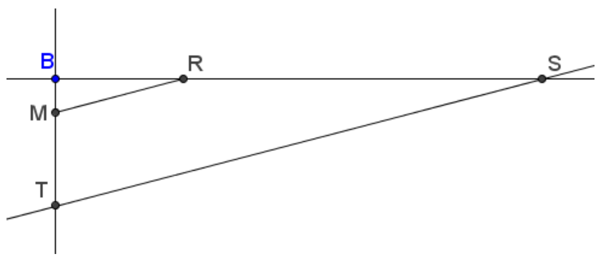


Figura. 8. Multiplicando con regla y compás.

Los triángulos MBR y TBR son semejantes, porque MR es paralela a TS. Como consecuencia de la semejanza, se tiene que:

$$\frac{\overline{BT}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{BS}}{\overline{BR}}$$

Despejando y reemplazando en la expresión anterior, se tiene que:

$$\overline{BS}=\overline{BT}\times\overline{BR}=\overline{BT}^2=\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2$$

(b) Con regla y compás se realiza la división $\frac{\overline{AB}^2}{4\times\overline{BQ}}$. Ahora se realizará la división entre el segmento BS, que encontramos en la sección anterior, y el segmento BQ.

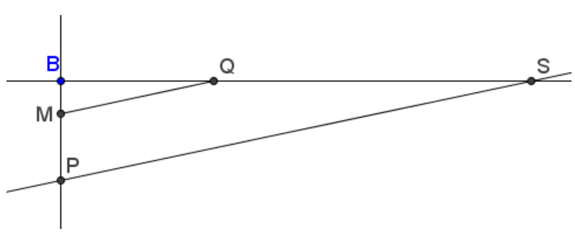


Figura 9: Dividiendo con regla y compás.

Se trazan dos retas perpendiculares, cuyo corte sea el punto B. Se trazan los segmentos BS y BQ sobre la misma recta, Se traza el segmento $\overline{BM} = 1$, sobre la otra recta. Se une M con Q y se traza una paralela a MQ que pase por el punto S.

Los triángulos MBQ y PBS son semejantes. Como consecuencia de la semejanza se obtienen las siguientes relaciones:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{BQ}}$$

$$\overline{BP} = \frac{\overline{BS}}{\overline{BR}}$$

Utilizando los procedimientos descritos anteriormente, se construye un programa en ambiente Geogebra, cuyos objetos iniciales sean los puntos A,B y Q, las rectas L1, L y L2 y cuyos objetos finales sean los puntos P, P´ y Q´, la circunferencia que pasa por P, Q y R.

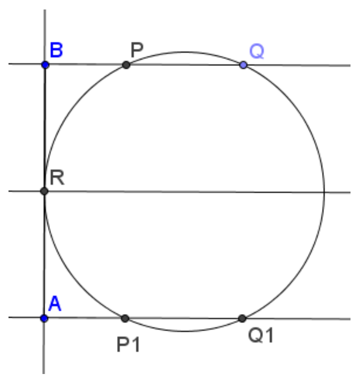


Figura 10: Construyendo un programa en ambiente Geogebra.

5.5. Argumentación formal

La proposición directa. Sea AB un segmento, su punto medio R, se trazan las rectas L1 y L2 perpendiculares a AB, por los puntos A y B, respectivamente, y L la mediatriz a AB. Sobre la recta L2, se ubican los puntos P y Q. Se trazan los simétricos de P y Q (P´ y Q´) con respecto a la recta mediatriz. Por los puntos R, P, Q, Q´ y P´, se traza una cónica.

Si La cónica es una circunferencia si y entonces $\overline{BP} \times \overline{BQ} = \left(\frac{\overline{AB}}{2} \right)^2$

Se hace una construcción bajo las condiciones de la hipótesis. Se traza el segmento RQ y su respectiva mediatriz. Se ubica el punto C, que resulta de la intersección entre dicha mediatriz y la recta L. Se traza una circunferencia con centro en C y radio CR. Sea P uno de los puntos de intersección de la circunferencia con la recta L2. Se traza el segmento RP.

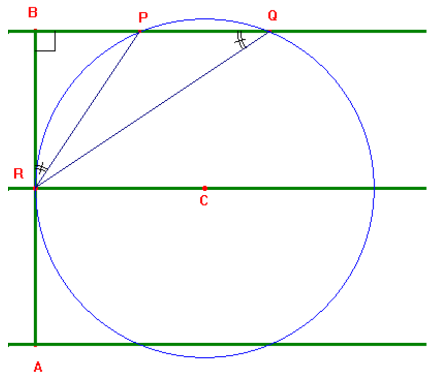


Fig. 11: Construyendo una representación gráfica bajo las hipótesis del problema.

Por hipótesis los triángulos *RBP* y *RBQ* son rectángulos. El ángulo semi-inscrito *BRP* y el ángulo inscrito *BQR*, comparten el mismo arco, por tanto tienen la misma medida.

Lo anterior implica que los triángulos rectángulos *RBP* y *RBQ* son semejantes. Por tanto, los lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BR}} = \frac{\overline{BR}}{\overline{BQ}} \quad (1)$$

De la relación (1) implica que:

$$\overline{BP} \times \overline{BQ} = \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 \quad (2)$$

(i) **La proposición recíproca**. Sea AB un segmento, su punto medio R, se trazan las rectas L1 y L2 perpendiculares a AB, por los puntos A y B, respectivamente, y L la mediatriz a AB. Sobre la recta L2, se ubican los puntos P y Q. Se trazan los simétricos de P y Q (P´ y Q´) con respecto a la recta mediatriz. Por los puntos R, P, Q, Q´ y P´, se traza una cónica.

Si se cumple que $\overline{BP} \times \overline{BQ} = \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2$ entonces, la cónica es una circunferencia.

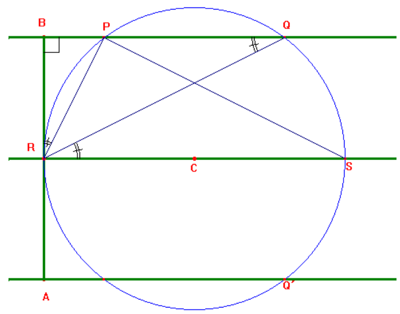


Fig. 12: Construyendo una representación gráfica bajo las hipótesis del problema.

Sea P un punto sobre L2 . Se traza una circunferencia circunscrita al triángulo RQQ´. Sea S el punto de intersección de dicha circunferencia con la recta L. RS es un diámetro. El punto P puede ser:

a. Interior a la circunferencia que pasa por R, Q y Q´. En este caso el triángulo RPS es obtusángulo.
b. Exterior la circunferencia que pasa por R, Q y Q´´. En este caso el triángulo RPS es acutángulo.
c. Frontera a la circunferencia que pasa por R, Q y Q´. Se demostrará que el punto el punto P pertenece a esta circunferencia. En este caso el triángulo RPS es rectángulo.

Los puntos P y Q se eligen de tal manera que $\overline{BP}\times\overline{BQ}=\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2$, entonces se cumple:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BR}}=\frac{\overline{BR}}{\overline{BQ}} \quad (3)$$

Los triángulos PBR y RBQ son rectángulos. Como los lados homólogos de estos triángulos son proporcionales, se sigue que son semejantes. De esto se deduce que la medida de los ángulos BRP y RQB son iguales.

Se construye la circunferencia circunscrita a al triángulo RQQ´.

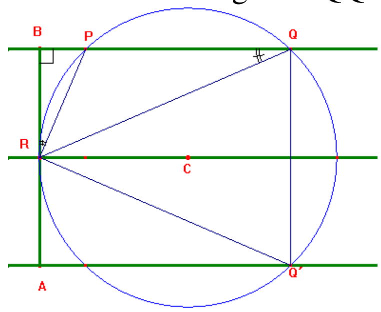


Fig. 13: Estableciendo relaciones.

Se construyen los triángulos RPS y SQR.

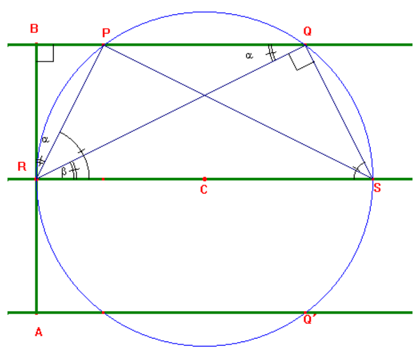


Fig. 14: Construyendo trazos auxiliares.

Por hipótesis, los ángulos BRP y PRS son complementarios, esto es:

$$PRS = 90^o - BRP = 90^o - \alpha \quad (4)$$

Las rectas L y L2 son paralelas y el segmento RQ es transversal. Los ángulos $BRP = PRS = \alpha$ y $QRS = \beta$, son alternos internos. Esto implica que:

$$\alpha = \beta \quad (5)$$

El triángulo RQS está inscrito en una semicircunferencia, por tanto, es rectángulo. De modo que:

$$QSR = 90^o - \alpha \quad (6)$$

De (4) y (6) se concluye que los ángulos:

$$PSR = QSR \quad (7)$$

Por P y Q se trazan dos segmentos perpendiculares a L2. Sean M y N los pies de estas perpendiculares. L2 es paralela con L, esto implica que:

$$\overline{MP} = \overline{NQ} \quad (8)$$

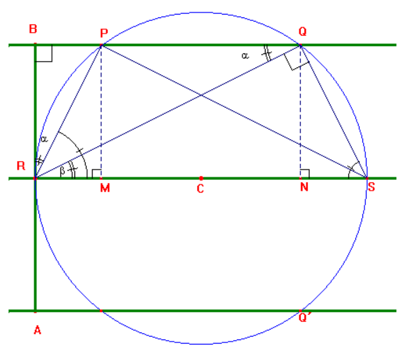


Fig. 15: Construyendo trazos auxiliares.

De (7) y (8) se deduce que los triángulos rectángulos RMP y SNQ, son congruentes. Dicha congruencia implica que:

$$\overline{RP} = \overline{SQ} \quad (9)$$

Sabiendo que los triángulos RPS y QRP comparten el lado RS y por los resultados (7) y (9), se sigue que dichos triángulos son congruentes.

Lo anterior implica que el triángulo RPS también es rectángulo. Por consiguiente, el ángulo RPS es recto y el punto P debe pertenecer a la circunferencia que pasa por R, Q y Q´.

Proposición de nuevos problemas

El objetivo central de esta sección es construir nuevos problemas, a través de la modificación de las condiciones del problema originalmente propuesto, para que los lectores del artículo inicien un abordaje donde se implemente la metodología de trabajo que aquí se presenta.

La recta que pasa por A y B divide al plano en dos semiplanos.

a) ¿Qué lugar geométrico pasa por P, Q, R, P´ y Q´, cuando los puntos P y Q están en semiplanos distintos?

b) ¿Qué lugar geométrico pasa por P, Q, R, P´ y Q´, cuando los puntos P y Q pertenecen al mismo semiplano? y además se cumple que:

$$\overline{BP}\times\overline{BQ} \neq \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2$$

c) ¿Qué lugar geométrico pasa por P, Q, R, P´ y Q´, cuando uno de los puntos P o Q están en el infinito?

REFLEXIONES FINALES

Existe evidencia para afirmar que el uso de software dinámico tiene potencial para contribuir de manera significativa, en el proceso de formular, examinar y validar la conjetura. En particular, las representaciones dinámicas de los problemas y de los objetos matemáticos que se generaron en la solución, con al ayuda del software dinámico, se convierten en un a plataforma para identificar y explorar relaciones matemáticos.

El uso del software dinámico en la resolución del problema, permitió utilizar diversas representaciones de los objetos matemáticos. La facilidad de cuantificar atributos matemáticos y la exploración de las representaciones visuales de problemas, fueron actividades fundamentales que apoyaron el proceso de los estudiantes de formular conjeturas. La manipulación directa de estas representaciones apoyó el proceso de articulación entre ellas.

En el proceso de validación de la conjetura, se usó el software para evaluar visualmente casos particulares, para examinar familias de casos al arrastrar elementos particulares dentro de la representación, para construir una macro y así examinar una familia de casos y para observar modelos que se presentan como un resultado de explorar las invariantes, en el comportamiento de ciertos datos.

En este contexto, el uso argumentos formales para probar la conjetura, sirvieron para confirmar la validez de la conjetura.

El hecho de haber trasegado por todas las etapas de la solución, aportó aproximaciones numéricas, visuales, electrónicas y formales. Los diferentes acercamientos a la solución del problema, ayudaron a formular nuevos problemas, para construir nuevas conjeturas, comunicar y argumentar las ideas matemáticas, en la exploración de nuevos terrenos matemáticos. Por lo tanto, la metodología de trabajo mostrada tiene varios acercamientos que van desde la exploración informal, hasta la argumentación formal.

En la resolución del problema, se lograron articular tres elementos centrales en el desarrollo de competencias matemáticas: conocimientos, habilidades y actitudes y valores. Por ejemplo, en el proceso de solución del problema, se discutieron contenidos como definición de la circunferencia, componentes y propiedades sobre la circunferencia. Así mismo, en la solución del problema, se puso demandó del uso de habilidades matemáticas como la visualización, la organización de la información, el uso de diversas representaciones, la búsqueda de patrones y la construcción de conjeturas. También fue necesario asumir una actitud crítica para discutir los métodos empleados y los resultados encontrados en el proceso de solución.

En este contexto, la actividad planteada y resuelta con apoyo de software dinámico, tiene potencial para contribuir en el desarrollo de las competencias de planteamiento y resolución de problemas de matemáticas, así como de la comunicación y argumentación de las ideas matemáticas de los estudiantes.

Referencias.

Benitez, D. & Santos, L.M. (2006). Identifying and supporting mathematical conjectures through the use of dynamic software. Proceedings of 30 International Congress o PME. Charleston University, Prague. ISSN 0771-100X.p.p 129-137.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics, 2001 Yearbook*, pp.1-23. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students’ proof schemes: Results from exploratory studies. CBMS Issues in Mathematics Education, vol, 7, pp. 234-283.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. ISBN-0-12-628871-2, New York: Academic Press

.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, CONOCIMIENTO Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS, Y FORMACIÓN DE PROFESORES.

César Cristóbal Escalante
Universidad de Quintana Roo
cescrist@uqroo.mx

Las propuestas de reformas en la enseñanza de las matemáticas demandan de la formación de nuevos profesores y la capacitación de los ya existentes, de forma tal que puedan seleccionar, elabora, dirigir y coordinar las actividades de instrucción, para que los estudiantes aprendan las matemáticas de acuerdo con los objetivos curriculares establecidos institucionalmente. En este reporte se describen aspectos de los procesos seguidos por profesores, durante un curso basado en la colaboración entre ellos para resolver problemas en contextos no matemáticos, en los cuales sus conocimientos previos son utilizados, reformulados y refinados.

Las demandas por reformas en los sistemas educativos que permitan mejores resultados en el aprendizaje de las matemáticas por los estudiantes se han incrementado sustancialmente en las últimas décadas. Se sugiere reformar los ambientes en los que se enseña y se aprenden las matemáticas escolares con el propósito de ayudar a los estudiantes a desarrollar conocimientos, habilidades, actitudes y valores sobre las matemáticas semejantes a los que desarrollan y utilizan los matemáticos. En particular, se recomienda que los ambientes de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula proporcionen a los estudiantes oportunidades para: analizar situaciones y resolver problemas, principalmente problemas en contextos semejantes a los de su vida cotidiana, que requieran no una respuesta simple, sino que propicien actividades de identificación y análisis de información, de planteamiento de supuestos y de conjeturas, de identificación de patrones y de relaciones, de uso de diferentes sistemas de representación, de argumentaciones y de comunicación; la comunicación de las ideas, de los argumentos, de la evaluación de propuestas, de establecer criterios para la valoración de propuestas de solución entre ellos; el uso de recursos tecnológicos (computadoras, calculadoras y otros), para ayudarlos a explorar información o situaciones desde varias perspectivas. Que les permita dar sentido y significado a las matemáticas utilizadas, y desarrollar una concepción de ellas, como una actividad social, realizada por humanos en diversos contextos sociales, en el que se utilizan diferentes métodos para indagar, para preguntar, para analizar, para buscar respuestas, para justificar y argumentar conjeturas, y diversos sistemas de representación para comunicarse (Schoenfeld, 1989, 1992; Santos, 1993; NCTM, 2000; Lesh y Doerr, 2003).

Los estudios e investigaciones que sustentan las propuestas de reformas, han permitido identificar el papel que juegan los profesores dentro de los sistemas y procesos educativos. Son un factor determinante en la interpretación y en la implementación del currículo en el aula. Sus conocimientos, concepciones, las experiencias, y los ambientes en los que aprendieron influyen en la forma en que seleccionen, diseñen, organicen e implementen las actividades de instrucción que deben realizar los estudiantes para aprender los objetivos curriculares (Lesh y Clarke, 2000; Ball y Bass, 2003).

La relación entre los conocimientos matemáticos de los profesores y el desempeño de los estudiantes a los que enseñan, no es simple. Ball (2000) señala que en varios estudios sobre esta relación, los conocimientos matemáticos de los profesores se miden considerando diferentes criterios. En los reportes analizados por Ball se utilizan como indicadores de esos conocimientos, la cantidad de cursos de matemáticas que cubren los profesores durante su formación profesional, los grados obtenidos, o se determina por medio de exámenes para medir habilidades matemáticas básicas. Ball observa que estos no son buenos indicadores del conocimiento matemático requerido por los profesores para enseñar; señalando que no siempre los alumnos de los profesores que conocen muchas matemáticas o que han tomado más cursos que otros, tienen un mejor desempeño.

Otros estudios han mostrado que los efectos que los profesores producen sobre el desempeño de los estudiantes, se deben principalmente a sus habilidades para entender y usar el conocimiento de la disciplina en la selección, en la organización, en el desarrollo y en la instrumentación de las actividades de instrucción. (Hill, Rowan, Ball, 2005)

Las reformas demandan que los profesores comprendan una gran variedad de tópicos y aproximaciones en las matemáticas, entre los que se puede incluir conceptos, principios, métodos y procedimientos que no formaron parte de las matemáticas que aprendieron durante su formación profesional, por ejemplo el uso de computadoras, de calculadoras, y la modelación y aplicación de las matemáticas a situaciones fuera del contexto escolar. (Lingefjärd, 2002). Muchos de ellos no han aprendido el contenido matemático que deben enseñar o no han aprendido esos temas de forma tal que estén capacitados para enseñar ese contenido en las nuevas aproximaciones que demandan las reformas curriculares que se desean realizar. Los procesos de reformas educativas, en particular en matemáticas, demandan que los profesores enseñen un currículo matemático muy diferente de aquel en el que fueron formados profesionalmente, o de aquél en el que ellos desarrollaron su experiencia docente. (Adler et al, 2005; Tirosh & Graeber, 2003)

¿Qué conocimientos deben desarrollar los profesores de matemáticas sobre la disciplina, sobre su enseñanza y sobre su aprendizaje para que los estudiantes aprendan los conocimientos establecidos en los objetivos curriculares? Esta pregunta se ha planteado y se la ha dado respuesta a lo largo del tiempo en los diferentes sistemas educativos al desarrollar los programas para la formación de los profesores de matemáticas que ellos requieren para atender los cursos que ofrecen en los diferentes niveles. En general, la respuesta se ha dado en términos del conocimiento matemático a ser enseñado (el contenido curricular del nivel educativo) y en una concepción de que el proceso de aprendizaje es un proceso donde el estudiante es un receptor pasivo de las enseñanzas del profesor, así los programas deberían proporcionar al profesor los conocimientos sobre el contenido matemático que ellos van a enseñar (Hill, Rowan, Ball, 2005).

La formación de los profesores de matemáticas en los niveles preuniversitarios tiene variaciones de país a país, pero la literatura sugiere que aunque los profesores tienen una formación amplia en matemáticas no tienen una comprensión profunda de las matemáticas fundamentales, lo que resulta básico para poder entender los procesos de aprendizaje en el aula.

Se considera que si los profesores aprendieran matemáticas por medio de experiencias en las que la indagación matemática, la colaboración y la resolución de problemas, los profesores podrían estar mejor equipados para usar métodos de enseñanza de este tipo y también tener mejores actitudes y concepciones sobre lo que significa aprender matemáticas. Por ello la meta de estos cursos debe ser no solamente desarrollar en los profesores conocimiento sobre contenido matemático, sino que debe propiciar el desarrollo de la confianza en sus conocimientos y habilidades matemáticas, y a desarrollar sus hábitos para reflexionar sobre lo que aprenden y enseñan (Bowers, 2000).

Llegar a tener una comprensión amplia y profunda del conocimiento matemático que requieren los profesores para enseñar, y de cómo pueden desarrollarlo de manera que les sea útil, requiere de una investigación sistemática y disciplinada. En este sentido son pertinentes plantearnos preguntas del tipo: ¿Cómo las diferentes experiencias matemáticas que tiene un profesor inciden en lo que conocen y pueden utilizar en el aula? ¿Cómo su comprensión de las matemáticas afecta su desempeño como profesor? ¿Qué tipos de problemas matemáticos debe poder resolver con la formación adquirida? ¿Qué tipos de problemas no matemáticos debe poder resolver con la formación adquirida?

La formación de los profesores de matemáticas utilizando actividades de resolución de problemas y ambientes de trabajo colaborativo.

En 2006 se realizó un estudio sobre el conocimiento matemático de profesores y el aprendizaje desarrollado por un conjunto de profesores del nivel bachillerato. La observación se realizó durante un curso cuyo propósito fue desarrollar las habilidades de los estudiantes para solucionar problemas, mejorar su comprensión de conceptos y procesos matemáticos, y su concepción de las matemáticas. Su duración fue de 16 sesiones de 3 horas semanales. Participaron 7 estudiantes de maestría en educación matemática, todos ellos profesores de matemáticas en el bachillerato. La instrucción se basó en la resolución de problemas, la mayoría de los cuales no tenía solución única. Los contextos en los problemas fueron situaciones sobre poblaciones, créditos, concentraciones, desplazamiento, cálculo de volúmenes y estudio de mezclas. Al resolverlos los estudiantes podían usar computadoras, calculadoras, o cualquier otro recurso. Cada problema se trabajó en tres fases: manera individual, en parejas, y con exposiciones de las parejas ante el grupo completo. Los estudiantes realizaban sus aproximaciones en la computadora o en sus cuadernos, y elaboraron reportes, estos productos fueron recopilados en cada fase. Se audiograbaron las exposiciones y discusiones en el grupo. Al final entregaron un reporte individual.

Como ejemplo de los resultados obtenidos se exponen los correspondientes a dos de las actividades. Estos problemas tienen solución única y pueden ser resueltos por diferentes formas, requieren utilizar el uso de funciones y de algunas de sus propiedades. El segundo requiere utilizar herramientas del cálculo. Se analizó la información tratando de identificar aspectos característicos de los episodios seguidos por los participantes al resolver cada problema: la comprensión del problema, la elaboración de un plan de solución, obtener la solución y verificarla, en las diferentes fases de trabajo, atendiendo los conceptos y procesos matemáticos, y las representaciones utilizadas.

Problema A. *Una escalera de longitud L metros, está recargada sobre una pared y su extremo superior se encuentra a una distancia de h metros sobre el piso. En ese momento, la escalera comienza resbalar de forma tal que el extremo superior baja con una rapidez constante de v m/seg. ¿Describa la rapidez con la que se mueve el otro extremo de la escalera? (Fig.1)*

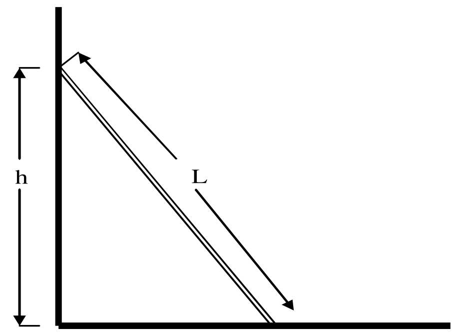


Figura 1:

Las acciones posibles requeridas para alcanzar la respuesta a este problema se muestran en la figura 2.

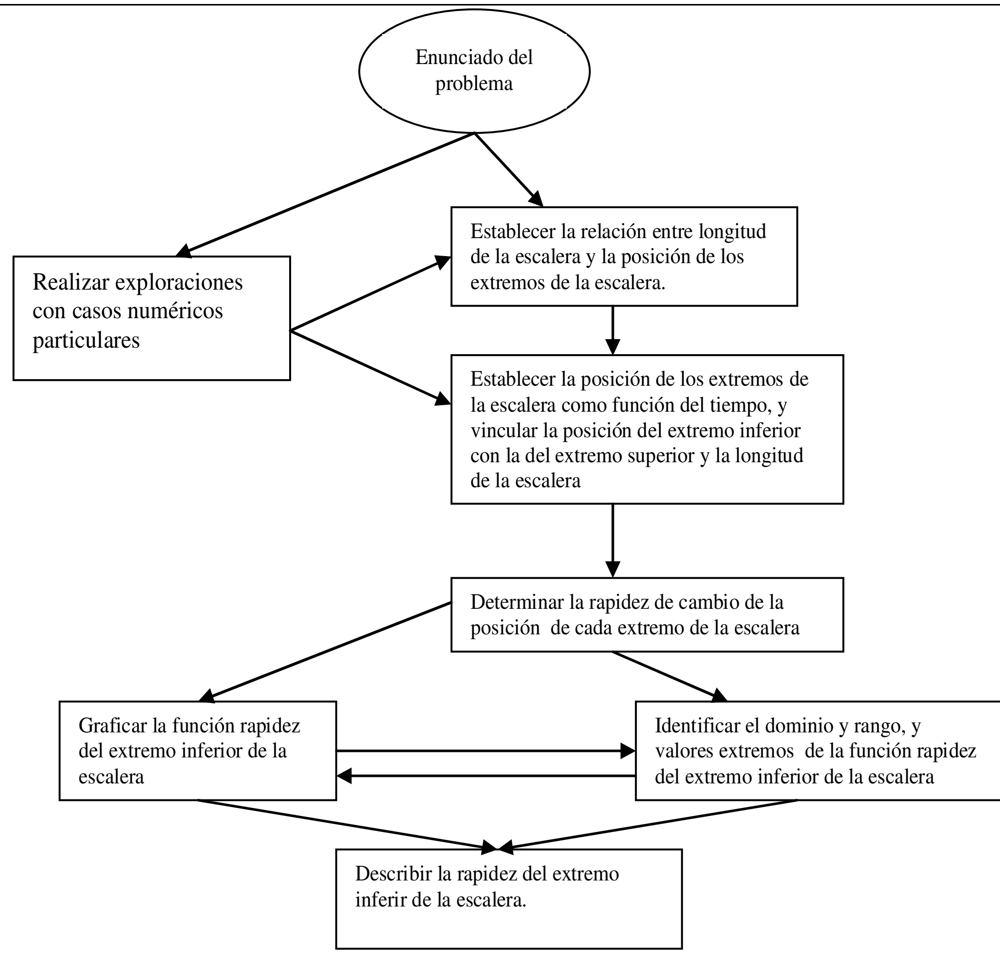


Figura 2:

Los reportes del trabajo individual permiten observar que la comprensión inicial del problema fue muy semejante: determinar la rapidez con la que se mueve el extremo inferior de la escalera.

Tres señalaron que se movía con la misma rapidez que el extremo superior. Aunque dos de estos realizaron posteriormente algunas exploraciones que los llevó a desechar esa afirmación (Fig.3 y Tabla 1). Las exploraciones iniciales realizadas por cinco de los siete estudiantes, se basaron en el uso del teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo formado por la escalera, la pared y el piso (Fig. 4). En este grupo, uno de los estudiantes llegó a considerar la relación obtenida como una situación de funciones implícitas, y utilizó el cálculo para determinar la expresión de la rapidez del extremo inferior (Fig. 5); cuatro utilizaron la relación obtenida para explorar el comportamiento del desplazamiento del punto inferior usando una aproximación numérica en Excel (Fig. 3), uno de estos cuatro, utilizó funciones y derivadas en una variable para obtener la expresión que proporciona la rapidez como función del tiempo. Entre todos los participantes, solo uno utilizó conceptos relacionados con movimiento angular, energía cinética y potencial en su primera aproximación.

Al lado sin identificar le llamo p, entonces $L^2 = h^2 + p^2$.

El valor de L es: $L = \sqrt{h^2 + p^2}$

El valor de p es: $p = \sqrt{L^2 - h^2}$

Si la escalera se desliza, lo hará una distancia, entonces si la v=d/t

La velocidad del punto inferior es $V = \dfrac{\sqrt{h^2 + p^2} - \sqrt{L^2 - h^2}}{t}$

Analizamos en primer lugar el desplazamiento del extremo inferior, dando valores al largo de la escalera (L), a la altura (h) y al piso donde está apoyada por su parte inferior la escalera (p). Obteniendo la siguiente tabla:

L	h	p	Desplazamiento
10	8	6	1.141428429
10	7	7.14142843	0.858571571
10	6	8	0.660254038
10	5	8.66025404	0.504897352
10	4	9.16515139	0.374240624
10	3	9.53939201	0.258566957
10	2	9.79795897	0.1519154
10	1	9.94987437	0.050125629
10	0	10	

Supuse que la parte superior de la escalera se movía a una velocidad de 1 m/s. De la tabla se puede ver que si h recorre 1 m en un segundo, p recorre 1.14 m en el mismo tiempo. Los extremos no tienen la misma velocidad.

Figura 3: Fragmento del reporte del estudiante G después del trabajo individual

Se puede observar que en esta fase de trabajo la mayoría de los estudiantes alcanzó una comprensión del problema en la que han identificado la incógnita y relaciones entre las cantidades relevantes, identifican el proceso de cambio entre ellas, realizando exploraciones sobre estos cambios, que los llevan a emitir conjeturas relacionadas sobre aspectos que caracterizan la respuesta a la pregunta.

El intercambio de ideas entre los estudiantes durante el trabajo en parejas, de acuerdo con los reportes entregados, derivó en cambios en la forma de las estrategias utilizadas para buscar la solución. Se mantuvo una comprensión del problema centrada en describir como cambia la posición del extremo inferior de la escalera. Una pareja utiliza los términos rapidez y velocidad como sinónimos, no en el sentido que se usa en la física, sino solo como el cociente entre la distancia y el tiempo.

Tabla 1: Aproximaciones al problema en el grupo después del trabajo en parejas.

<table>
<tr><th rowspan="2">Estudiante</th><th colspan="2">Consideraciones</th></tr>
<tr><th>Individuales</th><th>Parejas</th></tr>
<tr><td>J</td><td>Ambos extremos se mueven con la misma rapidez.</td><td rowspan="2">Usan teorema de Pitágoras, dan valores y exploran mediante procedimiento en Excel, usan la rapidez como cociente distancia entre tiempo.</td></tr>
<tr><td>G</td><td>Ambos extremos se mueven con la misma rapidez, exploran y rechazan la conjetura, siguen explorando</td></tr>
<tr><td>I</td><td>Ambos extremos se mueven con la misma rapidez, reflexiona sobre la situación, rechaza conjetura, y busca relación.</td><td rowspan="2">Usan T. de Pitágoras, Función y derivadas implícitas. La rapidez se concibe como la derivada de la posición. Representación algebraica.</td></tr>
<tr><td>F</td><td>Establece relaciones funcionales implícitas y usa la derivación implícita para obtener la rapidez</td></tr>
<tr><td>C</td><td>Ambos extremos se mueven con la misma rapidez.</td><td rowspan="3">Usan T. de Pitágoras, Función y derivadas en una variable. La rapidez se concibe como la derivada de la posición. Representación algebraica, sin establecer explícitamente al tiempo como la variable independiente.</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Establece relaciones funcionales y usan la derivada para obtener la rapidez.</td></tr>
<tr><td>D</td><td>Usa conceptos del movimiento angular y la ley de conservación de la energía.</td></tr>
</table>

Las estrategias para obtener la respuesta fueron de tres tipos: mediante aproximaciones numéricas, y las dos aproximaciones basadas en funciones y cálculo, una de ellas derivó en hacer uso de la solución de ecuaciones diferenciales sencillas.

Durante la exposición ante el grupo, estas dos últimas aproximaciones fueron consideradas, los participantes identificaron que ambas llevaban a la determinación de expresiones análogas para la expresión que proporcionaba la posición y la rapidez como función del tiempo del extremo inferior de la escalera.

Sabemos que la rapidez es la derivada de la posición con respecto del tiempo. Si nuestro sistema de referencia es como en la figura (la pared vertical es el eje y, y el suelo es el eje x), entonces de la figura (Triangulo rectángulo) tenemos la siguiente relación:

$y^2 + x^2 = L^2$ (1)

Como la escalara (extremo superior) baja, entonces de acuerdo a nuestro sistema de referencia es una rapidez en sentido negativo. Entonces derivando implícitamente (1) respecto de t, tenemos:

$2y\frac{dy}{dt} + 2x\frac{dx}{dt} = 0$ el dato que se nos proporcion**a** es $\frac{dy}{dt} = -v$, es decir la rapidez con la que cae (2)

El otro extremo de la escalera se mueve en el sentido positivo del eje x (de acuerdo al sistema de referencia), la rapidez con que se mueve es dx/dt, despejando de (2), tenemos:

$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$, (3) como la rapidez es constante, entonces cuando y = h, podemos calcular x de (1):

$x = \sqrt{L^2 - y^2}$, sustituyendo en (3) tenemos:

$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt} = \frac{vy}{\sqrt{L^2 - y^2}}$, esta es la expresión para la rapidez con que se mueve el extremo inferior de la escalera.

Figura 4: Fragmento del reporte del estudiante F después del trabajo individual.

Durante esta fase de trabajo, el profesor planteo peguntas relacionadas con las diferentes aproximaciones: ¿Ellas permiten describir como se mueve el extremo inferior de la escalera? ¿En que difieren? Llevando a los estudiantes a reflexionar sobre lo realizado. Hubo observaciones sobre el carácter particular de la aproximación numérica y sobre lo general de las aproximaciones funcionales.

Con estas ideas englobamos los resultados para plantear la solución final:
Supusimos que en el tiempo t= 0, la escalera no estaba vertical, sino que tenía una altura del piso a su extremo superior, que denotamos por A, de 8 unidades, la escalera media 10 unidades y la distancia del extremo inferior (B) a la pared es de 6 unidades por el teorema de Pitágoras.
$D_A(t) = Vt$ que es igual a la distancia recorrida por la escalera cuando se va desplazando.
$A(t) = A_0 - Vt$ que es la posición del punto A en el eje y en el tiempo t.
Entonces $B(t) = \sqrt{L^2 - (A(t))^2}$ es la posición del punto B en el eje x en el tiempo t.
$B_0 = \sqrt{L^2 - A_0^2}$ y $d_B(t) = B(t) - B_0$. Con estos resultados podemos sacar la expresión general, que nos indica la posición en que se encuentra el extremo inferior de la escalera en el tiempo t ,la cual sería:
$\sqrt{L^2 - (A_0 - Vt)^2}$.
Ahora para sacar la velocidad instantánea a la que se desplaza ese extremo inferior, hay que encontrar la derivada de esa expresión con respecto a t, que es la variable que se mueve. La derivada es la siguiente:
$\dfrac{V(A_0 - Vt)}{\sqrt{L^2 - (A_0 - Vt)^2}}$ en donde si sustituimos diferentes valores de t, nos dará la rapidez a la que se mueve el extremo inferior de la escalera. Nótese que efectivamente la velocidad no es constante, cuando la rapidez si es constante en el otro extremo.

Figura 5: Determinación de A(t) y B(t) por estudiante B.

Problema B. Un estanque contiene inicialmente n unidades de volumen de agua natural, con una concentración uniforme de sal c. Por el sol, cada semana se evapora una unidad de volumen de agua. Para que no aumente la concentración de sal, se retira además una unidad de volumen de la cantidad restante, y se reponen con agua natural. Describir la concentración de sal en el estanque.

El esquema de las acciones que pueden seguir los estudiantes para obtener la respuesta se muestra en la figura 6.

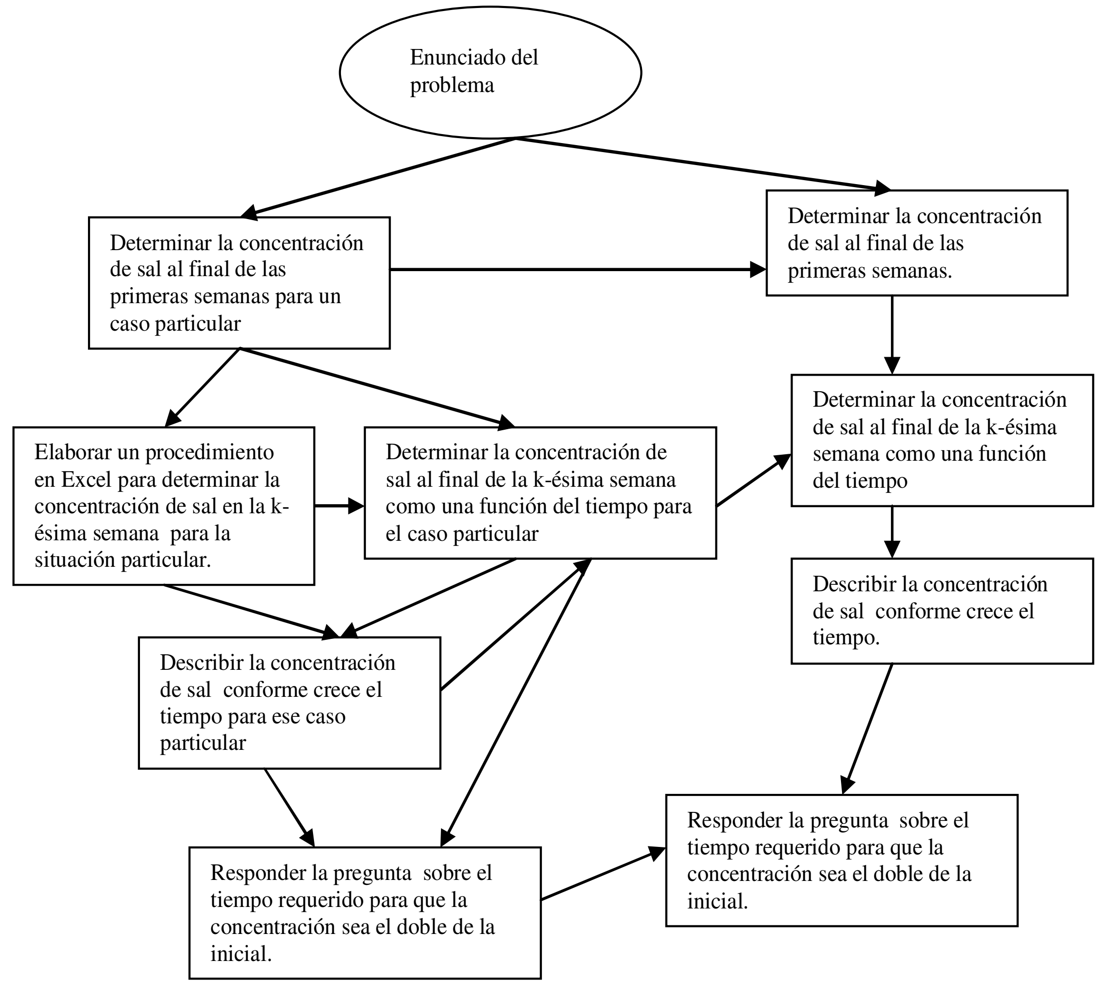
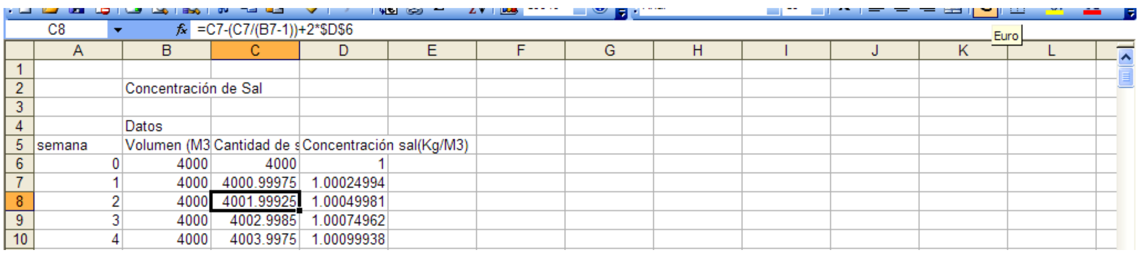


Figura 6:

En este problema se identifican contribuciones de los participantes en trabajo (individual – pareja – grupo – pareja - individual) para alcanzar la respuesta. Las siete aproximaciones iniciales para comprender el problema, desarrolladas en forma individual, se caracterizan por ser numéricas, realizadas a partir de asignar valores al volumen de agua y a la concentración (o a la cantidad) de sal iniciales en el estanque, y usando procedimientos en Excel, elaborados para determinar la concentración de sal al final de cada semana, sin proporcionar más información, como muestra la siguiente figura, en la que resalta el interés por determinar la cantidad de sal, como estrategia para obtener la concentración, que determinan obteniendo el cociente de cantidad de sal y el volumen de agua. En general identifican un procedimiento recursivo, como el realizado por el estudiante G (Fig. 7) que les permite obtener la cantidad de sal en términos de la existente al final de la semana anterior, C7, del volumen B7, y de la concentración inicial D6, y la concentración de sal al final de las siguientes semanas, repitiendo el procedimiento.

En esta fase, dos estudiantes tuvieron dificultades para entender y usar el concepto “concentración” al representar el proceso de variación de la concentración de sal en el estanque.


C8 =C7-(C7/(B7-1))+2*D6

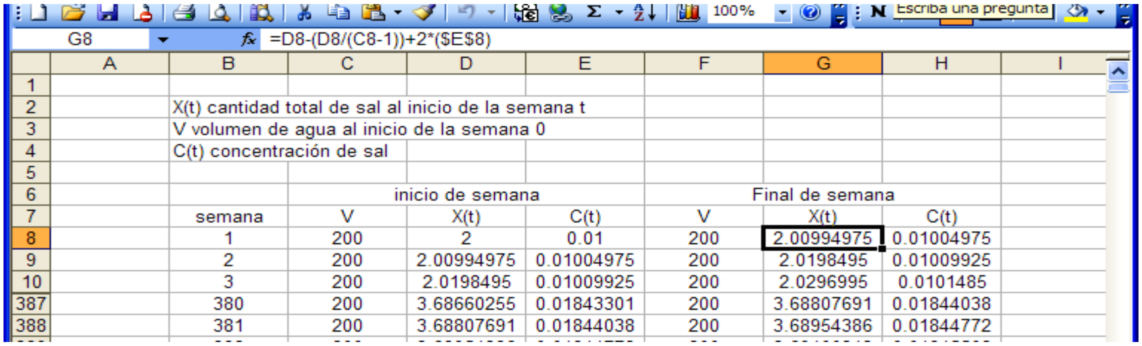
	A	B	C	D
1				
2		Concentración de Sal		
3				
4		Datos		
5	semana	Volumen (M3	Cantidad de s	Concentración sal(Kg/M3)
6	0	4000	4000	1
7	1	4000	4000.99975	1.00024994
8	2	4000	4001.99925	1.00049981
9	3	4000	4002.9985	1.00074962
10	4	4000	4003.9975	1.00099938

Figura 7. Estudiante G asigna 400 m3de V y una concentración de 1kg/m3 (reporte individual)

El trabajo en parejas, permitió mejorar la representación del proceso en Excel, haciendo visibles las cantidades relevantes al inicio y al final de la semana, respondiendo preguntas como: ¿Qué debo obtener? ¿Qué cantidad y concentración de sal hay cada semana? ¿Cómo obtengo esas cantidades? Se observa que trabajar en parejas, implica explicar y clarificar el proceso de solución (Figura 8).

Las presentaciones ante el grupo propiciaron la evaluación de lo realizado en parejas, en términos de responder las preguntas y dudas de los otros participantes. Esto permitió que se atendieran aspectos estructurales del procedimiento y consideraran criterios para evaluar la relación entre los datos iniciales y los resultados obtenidos. También propició que buscaran una representación algebraica del proceso. Las aportaciones expuestas en el grupo se analizaron en parejas, y se elaboró un nuevo reporte en forma individual, que se discutió con su pareja, se elaboró otro reporte de la pareja y se hizo una nueva presentación ante el grupo. En ésta, todos los estudiantes aceptaron la expresión y los argumentos alcanzados por la pareja formada por los estudiantes G y C, quienes resaltaron la naturaleza recursiva del proceso, y utilizando este hecho, aunque en forma incorrecta, obtienen en forma simple una expresión algebraica, que los lleva a establecer que el proceso en la semana 2 se repite de forma estructural, salvo por que la cantidad inicial de sal es X_1, y así sucede con las siguientes semanas (Fig. 9).

Su intención es exhibir que el proceso de transformación es el mismo cada semana. Por ello, si se parte cada semana de valores dados de cantidad de sal y de volumen de líquido, al final de la semana la expresión de la concentración de sal tiene la misma forma. Entonces pueden obtener c_n en términos de c_{n-1}. Obtienen así una expresión general que no verifican.



G8 =D8-(D8/(C8-1))+2*(E8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		X(t) cantidad total de sal al inicio de la semana t							
3		V volumen de agua al inicio de la semana 0							
4		C(t) concentración de sal							
5									
6				inicio de semana			Final de semana		
7		semana	V	X(t)	C(t)	V	X(t)	C(t)	
8		1	200	2	0.01	200	2.00994975	0.01004975	
9		2	200	2.00994975	0.01004975	200	2.0198495	0.01009925	
10		3	200	2.0198495	0.01009925	200	2.0296995	0.0101485	
387		380	200	3.68660255	0.01843301	200	3.68807691	0.01844038	
388		381	200	3.68807691	0.01844038	200	3.68954386	0.01844772	

Figura 8: Tabla modificada elaborada por la pareja estudiantes C y G.

Usan esta expresión para determinar el tiempo en el que la concentración alcanzaría un valor igual al doble de la concentración inicial, resolviendo la ecuación $2\frac{X_0}{n}=\frac{X_0(n^2-2)^k}{n^{k+1}(n-1)^k}$ usando un procedimiento numérico en Excel.

Ya que al iniciar la primera semana hay $X_0 = nc$ cantidad de sal en el acuario.
Al final de cada una de las siguientes semanas habrá:

$$X_1 = X_0 - \frac{X_0}{n-1} + 2c = \left(\frac{n-2}{n-1}\right)X_0 + 2\frac{X_0}{n} = X_0\frac{(n^2-2)}{n(n-1)}$$

si consideramos que al inicio de la semana 2 hay X_1 de sal:

$$X_2 = X_1\frac{(n^2-2)}{n(n-1)} = X_0\frac{(n^2-2)^2}{n^2(n-1)^2} \quad ,\ldots y\ tambien \quad X_k = X_0\frac{(n^2-2)^k}{n^k(n-1)^k}$$

la concentración en la semana k es: $C(k) = X_0\frac{(n^2-2)^k}{n^{k+1}(n-1)^k}$

Figura 9. Representación recursiva errónea que inicialmente se acepta en el grupo, elaborada por el estudiante G, después de la exposición en el grupo.

El procedimiento seguido es incorrecto. Pues el proceso recursivo que identifican es válido solo para la primera semana. En las siguientes se utiliza siempre agua fresca (Fig. 10). Este hecho no fue percibido por ninguno de los participantes y todos aceptaron el desarrollo realizado por este grupo, incluida la pareja de los estudiantes B y D que habían estado trabajando cada transformación considerando que al final de la semana se reponía el agua con agua natural, esto es, agua de las mismas características que al inicio del proceso.

En la discusión en grupo nadie puso en duda los resultados obtenidos, y no consideraron el procedimiento realizado en la primera fase, en el que se observa un crecimiento lento de la concentración. En una sesión de 30 minutos, después de haber revisado los reportes de esta actividad, el instructor preguntó a los estudiantes acerca de los resultados obtenidos por medio de los procedimientos desarrollados en Excel durante la primera y segunda fase de trabajo (Fig.7 y 8), en el que se observa un crecimiento lento de la concentración de sal. Invitándolos a reflexionar sobre lo realizado, a identificar las discrepancias entre ambos resultados. Para ello planteó preguntas del tipo: ¿Cuál de los dos procedimientos proporciona la respuesta correcta? ¿Cuál de ellos proporciona una descripción adecuada del proceso? ¿Cómo lo podemos saber? ¿Qué criterio podemos utilizar para evaluar cada procedimiento?

De acuerdo con esto, al final de la semana 1 (inicio de la semana 2) hay

$X_1 = X_0 \dfrac{(n^2-2)}{n(n-1)}$ unidades de sal en el estanque y n unidades de volumen de líquido. Entonces al final de la segunda semana, por evaporación se pierde una unidad de volumen, por ello, habrá n-1 unidades de volumen de agua y la misma cantidad de sal, en ese momento la concentración será igual a

$\dfrac{X_0 \dfrac{(n^2-2)}{n(n-1)}}{n-1}$, (esta es la cantidad de sal que hay en una unidad de volumen del líquido en el estanque), al retirar una unidad de líquido existente se retira una cantidad de sal igual a $\dfrac{X_0 \dfrac{(n^2-2)}{n(n-1)}}{n-1}$, después de esto, en la segunda semana, la cantidad de sal que queda es igual a

$X_0 \dfrac{(n^2-2)}{n(n-1)} - \dfrac{X_0 \dfrac{(n^2-2)}{n(n-1)}}{n-1}$, y al reponer dos unidades de agua fresca se adiciona $2\dfrac{X_0}{n}$ unidades de sal, o sea que la concentración de sal al finalizar la segunda semana será igual a

$$X_2 = X_0 \frac{(n^2-2)}{n(n-1)} - \frac{X_0 \frac{(n^2-2)}{n(n-1)}}{n-1} + 2\frac{X_0}{n} = c\frac{(n^2-2)}{(n-1)} - \frac{c\frac{(n^2-2)}{(n-1)}}{n-1} + 2c$$

Fig.10. Concentración de sal en el estanque al final de la segunda semana (elaborado por el autor)

El instructor intervino para propiciar la identificación de esta discrepancia por los estudiantes y llevarlos a reflexionar sobre lo realizado, los conceptos de modelo y las representaciones de una situación o fenómeno. Los estudiantes volvieron al problema, trabajando de nuevo en parejas, algunos lograron obtener la representación simbólica del proceso y se comunicó este resultado al grupo.

Durante la discusión se hizo evidente el hecho de que diferentes aproximaciones deben llevar al mismo resultado. En esta plática algunos estudiantes consideraron que las dos aproximaciones deberían proporcionar los mismos resultados, o muy parecidos, y el mismo comportamiento en lo general.

Revisaron el procedimiento en Excel y el carácter recursivo del mismo, que utilizaron para intentar obtener, en esta breve sesión, una nueva expresión algebraica, pero no detectaron el error cometido al deducir las expresiones algebraicas anteriores (Fig. 10).

Ya que al iniciar la primera semana hay $X_0 = nc$ cantidad de sal en el acuario.
Al final de cada una de las siguientes semanas habrá:

$$X_1 = X_0 - \frac{X_0}{n-1} + 2c = (\frac{n-2}{n-1})X_0 + 2c = (\frac{n-2}{n-1})nc + 2c$$

$$X_2 = X_1 - \frac{X_1}{n-1} + 2c = (\frac{n-2}{n-1})X_1 + 2c = (\frac{n-2}{n-1})^2 nc + (\frac{n-2}{n-1})2c + 2c$$

$$X_3 = X_2 - \frac{X_2}{n-1} + 2c = (\frac{n-2}{n-1})^3 nc + (\frac{n-2}{n-1})^2 2c + (\frac{n-2}{n-1})2c + 2c$$

.....

$$X_k = (\frac{n-2}{n-1})X_{k-1} + 2c = (\frac{n-2}{n-1})^k nc + (\frac{n-2}{n-1})^{k-1} 2c + ... + (\frac{n-2}{n-1})2c + 2c =$$

$$= (\frac{n-2}{n-1})^k nc + \left[(\frac{n-2}{n-1})^{k-1} + (\frac{n-2}{n-1})^{k-2} + ... + (\frac{n-2}{n-1}) + 1\right]2c =$$

$$= (\frac{n-2}{n-1})^k nc + \left[\frac{1-(\frac{n-2}{n-1})^k}{1-(\frac{n-2}{n-1})}\right]2c = (\frac{n-2}{n-1})^k nc + (n-1)\left[1-(\frac{n-2}{n-1})^k\right]2c$$

……..

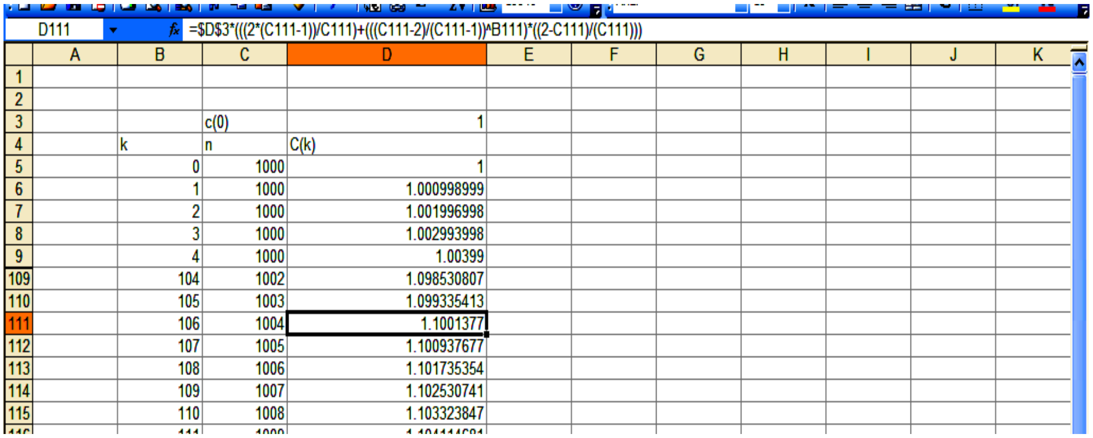
Entonces la concentración de sal al final de la i-ésima semana se obtiene dividiendo por la cantidad de sal por el volumen existente al final de esa semana, esto es por n:

$$C_k = \frac{1}{n}(\frac{n-2}{n-1})^k nc + \frac{n-1}{n}\left[1-(\frac{n-2}{n-1})^k\right]2c = \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^k c + \left(\frac{n-1}{n}\right)\left[1-\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^k\right]2c =$$

$$= c\left[\frac{2(n-1)}{n} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^k\left(\frac{2-n}{n}\right)\right]$$

Figura 11: Reformulación realizada por Gael para determinar la representación funcional de la concentración de sal.

Solo el estudiante G elaboró y entregó por escrito un nuevo reporte donde verificó la nueva expresión algebraica para la concentración de sal mediante un procedimiento en Excel para evaluarla (Figs. 11 y 12), basado en la expresión para C_k obtenida en la nueva forma, en el que utiliza valores particulares: un volumen de 1000 y una concentración de 1 (no establece unidades), y no incluye otros comentarios.



D111 =D3*(((2*(C111-1))/C111)+(((C111-2)/(C111-1))^B111)*((2-C111)/(C111)))

	A	B	C	D
1				
2				
3			c(0)	1
4		k	n	C(k)
5		0	1000	1
6		1	1000	1.000998999
7		2	1000	1.001996998
8		3	1000	1.002993998
9		4	1000	1.00399
109		104	1002	1.098530807
110		105	1003	1.099335413
111		106	1004	1.1001377
112		107	1005	1.100937677
113		108	1006	1.101735354
114		109	1007	1.102530741
115		110	1008	1.103323847

Fig. 12 Procedimiento en Excel para verificar el comportamiento de la concentración de sal, elaborado por Gael, de acuerdo con la nueva expresión deducida.

Conclusiones

Durante el proceso de solución de las actividades los estudiantes desarrollaron actitudes y concepciones que no mostraron inicialmente, por ejemplo, establecer y usar criterios para valorar las respuestas que daban a las preguntas planteadas, y la búsqueda de soluciones generales más que particulares. También mostraron valorar algunos procedimientos sobre otros. Durante el trabajo en parejas y en todo el grupo, se observó que los estudiantes que trabajaban con aproximaciones numéricas, aceptaban las aproximaciones de otro tipo, más si estas utilizaban conceptos y resultados de matemáticas “avanzadas” (cálculo, por ejemplo). No identificaron que las aproximaciones numéricas en Excel (no en lápiz y papel) también podrían proporcionarles la información necesaria para responder las preguntas planteadas en el problema y otras que se requieran para describir la situación.

La dinámica de trabajo bajo la secuencia individual – parejas – grupo – individual… permitió desarrollar en algunos estudiantes una actitud de colaboración y de compromiso para realizar las tareas que demandaban las actividades. Aunque para algunos de los estudiantes este ambiente siguió siendo un espacio de trabajo en el que la tarea debe realizarse como lo demanda el instructor.

Al inicio los estudiantes exhibieron una concepción del proceso de aprendizaje en el aula, en la que el instructor es quién evalúa lo que realiza cada estudiante. Varios de ellos le demandaban al instructor evaluara lo que realizaban en forma individual o en parejas, mostrando sorpresa o malestar cuando el profesor respondía a su pregunta con alguna pregunta sobre lo que ellos habían realizado o proponiendo que se preguntara a otra pareja.

La participación y disposición del instructor para transformar el ambiente de trabajo del aula en una comunidad de aprendizaje es muy importante, considerando la heterogeneidad de la formación y experiencias de los estudiantes. Es relevante que enfatice en los participantes que la discusión de las ideas es un proceso básico para acceder a nuevo conocimiento y para refinar lo que ya se conocía; que considere las posibles trayectorias de resolución de un problema donde se resalte el uso de diferentes herramientas y formas de representación, como elementos útiles para propiciar y guiar a los estudiantes en la problematización de las tareas, desarrollando en ellos el hábito de plantearse preguntas y buscar su respuestas. Esto es un aspecto clave en la transformación de un grupo en una comunidad de aprendizaje.

Los estudiantes exhibieron, inicialmente, disponer de los conocimientos matemáticos conceptuales y algorítmicos para enfrentar los problemas, y tuvieron dificultades para alcanzar la solución a los mismos. Exhibieron conocimientos sobre los conceptos de función, derivada, integral, ecuaciones diferenciales, podrían elaborara procedimientos en Excel y podían obtener derivadas y elaborar gráficas de funciones, pero tuvieron dificultades para integrar algunas propiedades y características y usarlas para resolver los problemas. Algunas de estas propiedades conceptuales (por ejemplo: estimación, solución, obtención de extremos de funciones de una y dos variables) surgieron durante las actividades de resolver los problemas. Esto, lleva a observar y preguntarnos sobre la relación entre el desarrollo de conocimiento sobre conceptos y el desarrollo de habilidades como la de resolver problemas: ¿Cómo es esa relación? ¿Se pueden desarrollar por separado?

Referencias

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F., and Novotna, J. (2005). Reflections on an emergin field: researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics* 60, p. 359 - 381.

Ball, D.L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group,* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM

Ball, D. L. (2000). Bridging Practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning teach. *Journal of Teacher Education*.51 (241)

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose, P. Valero, (Eds.) *Meaning in mathematics education*. Mathematics Educational Library V. 37; Springer. New York.

Boaler, J. (2000). Mathematics from another world: traditional communities and the alienation of learners. *J. of Math. Behavior*, 18(4), 379 – 397.

Bowers, J. (2000). Postscript: Integrating themes on discourse and design. En P. Cobb, e. Yackel, and K. McClain (Eds.) (2000). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools and instructional design*. Lawrence Erlbaum Associates Pubs. Mahwah, NJ.

Hill, H., Rowan, B., Ball, D.L. (2005). Teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal,* 42(2), p. 371- 406

Lesh, R. and Clarke, D. (2000). Formulating operational definitions of desired outcomes of instruction in mathematics and science education. En Anthony E. Kelly and Richard A. Lesh (Eds.) (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Mahwah, NJ. (Cap. 6)

Lesh, R. y Doerr, H. M. (Eds) (2003). Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Mahwah, NJ.

Lingefjärd, T. (2002). Mathematical modeling for preservice teachers: a problem from anesthesiology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 7, pp.117 – 143.

Manouchehri, A. (2003). Patterns of reasoning about mathematical models: a case study of high school mathematics teachers. Focus on Learning Problems in Mathematics 25(2). P. 52 – 74.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA.

Santos, L. M. (1993). La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas. Mathesis 9, 419 - 432.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of student's mathematical beliefs and behavior. Journal for Research in Mathematics Education, 20, 338-350.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense - making in mathematics. En D. Grouws (Ed.). Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. (pp. 334-370). New York: MacMillan, 1992.

Tirosh, D. & Graeber, A. (2003). Challenging and changing mathematics teaching classroom practices. En A. J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, and F. K.S. Leung: Second International Handbook of Mathematics Education. Kluwer Academic Publishers. London.

EL PUNTO DE FERMAT: UN PROBLEMA GEOMÉTRICO DE OPTIMIZACIÓN

L. F. M. Lorena García García — Dr. Armando Sepúlveda López
lgarcia@ifm.umich.mx — asepulve@live.com.mx
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

En este trabajo presentamos un problema geométrico de variación relacionado con la suma de las distancias desde los vértices a un punto interior de un triángulo acutángulo dado, que el célebre matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665) planteó al matemático italiano Evangelista Torricelli (1608-1647). La existencia de un punto interior que hace mínima la suma de esas distancias, corresponde a la solución del problema planteado; a este punto se le reconoce como Punto de Fermat. El problema involucra nociones fundamentales del currículum escolar como triángulo acutángulo, medición, suma de distancias y variación. Además, como extensión del problema, abordamos el caso en que el triángulo es obtusángulo y exponemos su solución cuando el ángulo obtuso es menor, mayor o igual a 120°. Aquí desarrollamos diferentes formas de solución con distintos acercamientos, algunos de ellos intuitivos, otros formales e incorporamos el uso de software dinámico; en su oportunidad, destacamos estrategias y procesos de resolución de problemas y mostramos las ventajas de la utilización de un software dinámico. El presente trabajo forma parte de un estudio amplio sobre resolución de problemas y la incorporación de la tecnología que actualmente se lleva a cabo.

Introducción

En cierta ocasión Fermat, *Príncipe de los aficionados*, retó a Torricelli, discípulo de Galileo, con el siguiente problema: Dadas tres ciudades representadas por los puntos A, B y C, unirlas por una red de carreteras de forma que sea de longitud mínima. El punto P del que parte la red mínima hacia A, B y C, es conocido como Punto de Fermat.

El estudio y análisis de este problema puede contribuir al desarrollo de importantes ideas matemáticas; es un problema geométrico que involucra la noción de variación. Un acercamiento intuitivo con una simple regla graduada permite ver que si varía P, punto interior del triángulo ABC, la suma de sus distancias a los vértices también varía; se puede complementar este acercamiento con el uso del software dinámico Cabri Géomètre y observar que, efectivamente, dicha suma varía y además, está acotada. Un acercamiento formal permite ubicar cotas, inferior y superior, para la suma y luego dar la demostración de la existencia del punto P que la minimiza.

La formulación y resolución de problemas es una actividad que ha caracterizado al hombre desde la antigüedad y, sin duda, es el motor que ha promovido el desarrollo de las matemáticas; en este sentido, Polya (1945) establece que la resolución de problemas es una actividad que caracteriza al ser humano. Históricamente podemos observar cómo el hombre se ha planteado problemas matemáticos en diferentes áreas y de distinto grado de dificultad; algunos de ellos tardaron siglos en ser resueltos o en justificar por qué no se pueden resolver, como es el caso de los tres problemas clásicos de los griegos, entre otros.

El amplio desarrollo de herramientas computacionales ha influido notablemente tanto en los métodos y caminos de producir conocimiento disciplinar, como en la forma en que los estudiantes pueden aprender o construir ese conocimiento. En este sentido, el Principio de la tecnología (NCTM, 2000), establece que la tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, influye en las matemáticas que se enseñan en la escuela y aumenta las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes. También se menciona, en los estándares correspondientes a los niveles 9-12, que en vez de dedicar tanto tiempo a los algoritmos debe invertirse más tiempo y esfuerzo para que los estudiantes adquieran estructuras conceptuales mediante exploraciones, basadas en experiencias numéricas y geométricas, aprovechando las posibilidades que proporciona el uso de la tecnología.

En el prefacio del libro *Geometría e Imaginación*, Hilbert escribió en 1927 (citado por Zimmerman y Cunningham, 1995):

> Con ayuda de la imaginación visual [Anshauung] podemos iluminar la multiplicación de hechos y problemas de geometría y, además, es posible en muchos casos interpretar el trazo geométrico con los métodos de interpretación y prueba… De esta manera, siendo la geometría multifacética como es y estando relacionada a las más diversas ramas de las matemáticas, podemos incluso obtener una investigación sumarizada de las matemáticas como un todo y una idea valida de la variedad de estos problemas y la riqueza de las ideas que contiene. (p. 1)

Este trabajo se ubica en el contexto de esta recomendación, en el que además incorporamos el uso de un software dinámico que potencia las posibilidades de representación y visualización, lo cual hace que este medio se convierta en una herramienta de aprendizaje. Además, debemos recordar que el desarrollo de la imaginación visual de los estudiantes, es una de las habilidades esenciales que diversas propuestas curriculares se proponen promover (NCTM, 2000; Alarcón, 1994) a lo largo de la educación escolar.

En este contexto, Santos (2004) ilustra el potencial del software dinámico en la construcción de configuraciones que permiten visualizar y establecer distintas conexiones entre diferentes conceptos. La visualización en matemáticas nos ayuda a comprender mejor los problemas geométricos, los cuales pueden estar planteados en diferentes contextos, y nos brinda la posibilidad de acceder a los conceptos y principios matemáticos involucrados. Las representaciones hechas manualmente, con lápiz y papel, son estáticas para los aprendices y pueden impedir el entendimiento de un problema de variación, por ejemplo; estas limitaciones tienden a desaparecer cuando los estudiantes aprenden a utilizar la computadora como un medio de visualización que puede hacer ver lo que era inadvertido, permitiendo identificar relaciones, regularidades y patrones.

En su teoría sobre los registros semióticos de representación, Duval (1996) asigna primordial importancia al uso de diferentes representaciones externas de los componentes de un problema, para aprender los conceptos involucrados. Estas representaciones pueden ser generadas por el aprendiz a través del lenguaje oral, escrito o los medios tecnológicos; o bien, una mezcla de ellos. Un sistema de registros semióticos de representación se conforma cuando es posible realizar tres actividades cognitivas ligadas con la semiósis (aprehención o producción de una representación semiótica): identificación, tratamiento y conversión. Un sujeto ha aprendido un concepto en la medida en que realiza estas actividades y transita libremente de un de un registro de representación a otro.

Para explorar el problema del Punto de Fermat, nos apoyamos de la visualización que ofrece el Cabri Géomètre. La utilización sistemática de este software, permite a los participantes construir, explorar, visualizar y manipular en forma directa las figuras geométricas. Un seguimiento de los cambios que se producen en la transformación de los objetos geométricos, puede conducir a la búsqueda de patrones y a la elaboración de conjeturas. Marrades y Gutiérrez (2000, citado por Benítez, 2006, p. 163), señalan:

> Los software de geometría dinámica ayudan a crear un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes pueden experimentar, observar la permanencia de las propiedades matemáticas y verificar las conjeturas mucho más fácilmente que en otros ambientes computacionales, y que en el entorno de lápiz y papel. (p. 95)

Ahora bien, el estudio de los problemas de variación es fundamental en matemáticas (NCTM, 2000) y forma parte de las matemáticas del cambio, regularmente asociada al estudio del Cálculo. Enseguida enunciamos el problema del Punto de Fermat y procedemos a darle solución. Elegimos este problema porque nos interesa mostrar que implica conceptos matemáticos importantes; hacemos una revisión exhaustiva de su solución con diferentes acercamientos, donde se aprecia, por un lado, la dificultad de la afirmación en el enunciado y la importancia de los conceptos y, por otro lado, la potencia que tiene el uso del software para acceder al problema, desde el entendimiento del mismo hasta su solución, lo cual permitirá elaborar una argumentación geométrica sólida que justifica plenamente la solución.

Planteamiento del Problema del Punto de Fermat

Dado un triángulo acutángulo ABC, localizar el punto interior P cuya suma de distancias a los vértices A, B y C, sea la más pequeña posible (Coxeter, 1969).

Solución. Dado el triángulo acutángulo *ABC*, consideremos un punto interior arbitrario P; trazamos los segmentos *AP, BP* y *CP* (Figura 1). Mediante una exploración inicial podemos darnos cuenta, incluso con lápiz y papel, que la suma de las distancias de los vértices a *P* varía, cuando *P* se mueve.

Si incorporamos un software dinámico observamos que, efectivamente, la suma varía.

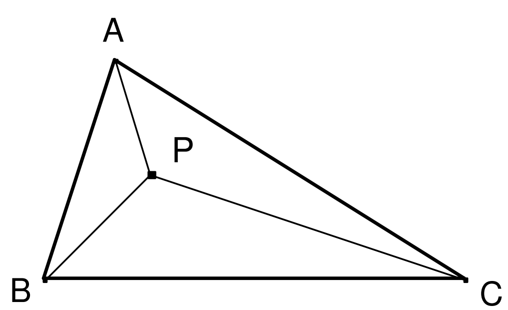


Figura 1. Ilustración asociada al problema.

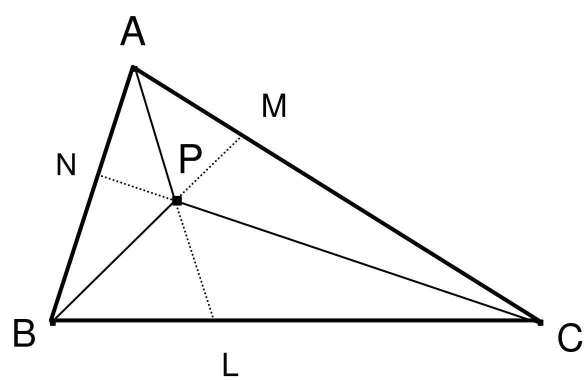


Figura 2. Trazos para acotamiento.

Acotamiento. Es posible acotar la suma de esas distancias y concluir que para cualquier punto *P*, la suma está entre el semiperímetro y el perímetro del triángulo; es decir:

$$\frac{AB+AC+BC}{2} < AP+BP+CP < AB+AC+BC$$

La primera desigualdad se obtiene de aplicar el teorema de la desigualdad del triángulo a ΔABP, ΔBCP y ΔCAP, obteniéndose

$$AB < BP + AP;\ AC < AP + CP;\ BC < BP + CP$$

y sumando: $$\frac{AB + AC + BC}{2} < AP + BP + CP.$$ Para probar la segunda desigualdad, realizamos los siguientes trazos: prolonguemos AP, BP y CP hasta cortar a los lados BC, CA y AB en los puntos L, M y N, respectivamente (Figura 2).

En ΔABL y ΔLCP tenemos: $AP+PL<AB+BL$ y $CP<PL+LC$; sumando obtenemos

$$AP+CP<AB+BC \qquad (1)$$

En ΔBCM y ΔMAP tenemos: $BP+PM<BC+CM$ y $AP<PM+MA$; sumando obtenemos

$$BP+AP<BC+CA \qquad (2)$$

En ΔCAN y ΔNBP tenemos: $CP+PN<CA+AN$ y $BP<PN+NB$; sumando obtenemos

$$CP+BP<CA+AB \qquad (3)$$

De manera que al sumar (1), (2) y (3) se obtiene la segunda desigualdad

$$AP+BP+CP < AB+BC+CA.$$

Obtención del punto *P*. Veamos ahora cómo es que se obtiene el punto P que minimiza la suma $AP+BP+CP$. Los segmentos AP, BP y CP determinan tres triángulos; la rotación de uno de estos constituye una estrategia heurística necesaria para resolver el problema. Rotamos el triángulo APB un ángulo de 60° alrededor de B, obteniendo así el triángulo $C'P'B$ (Figura 3 a). Es claro que los triángulos ABC' y PBP' son equiláteros (Figura 3 b).

Entonces: $$AP + BP + CP = C'P' + P'P + PC \qquad (4)$$

El segundo miembro de la igualdad (4) es una forma de ir de C' a C. La suma de los tres segmentos es mínima cuando $C'C$ es un segmento; en cuyo caso (Figura 3 c):

$$\angle BPC = 180° - \angle BPP' = 120°$$

y $$\angle APB = \angle C'P'B = 180° - \angle PP'B = 120°$$

por lo que $\angle APC = 120°$.

Así, el punto deseado P, para el cual $AP+BP+CP$ es mínima, es el punto desde el cual cada uno de los lados AB, BC y CA subtiende un ángulo de 120°.

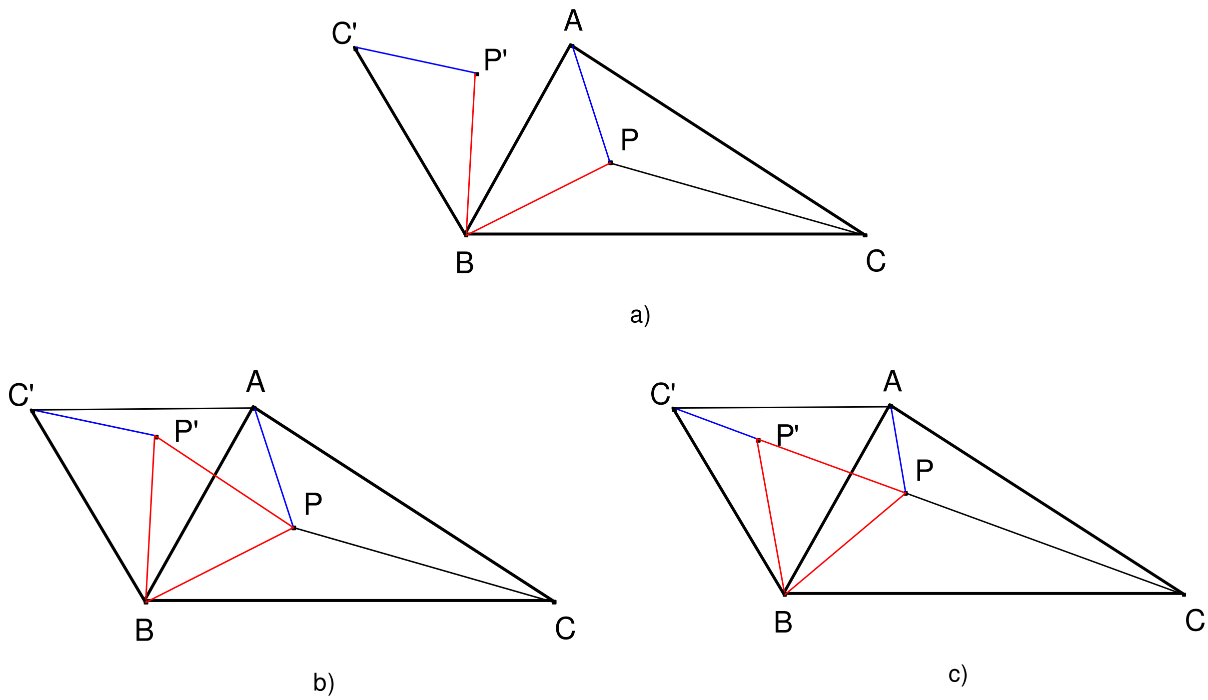


Figura 3. Estrategia heurística de rotación para la solución.

Este punto se construye fácilmente como la intersección de la línea *CC'* y el círculo que pasa por *ABC'* (Figura 4). Esta solución es válida siempre y cuando el ΔABC no tenga un ángulo mayor o igual que 120°.

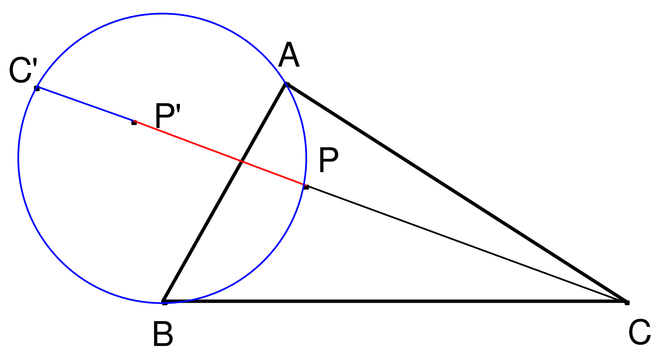


Figura 4. Obtención del punto P.

Mediante el software dinámico Cabri Géomètre, también podemos obtener la gráfica del lugar geométrico correspondiente a la suma, en función, por ejemplo, de *BP* (Figura 5).

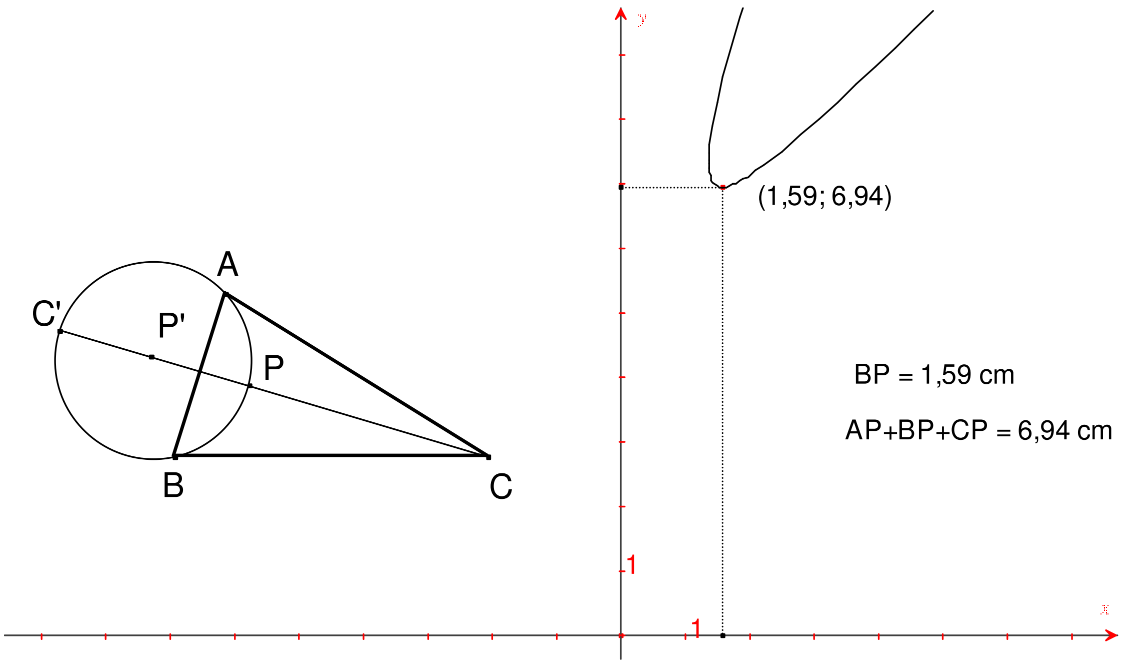


Figura 5. Lugar geométrico determinado por P.

Otra forma de obtener P. Además del triángulo equilátero *ABC'*, construido sobre *AB*, podemos trazar los triángulos equiláteros *BCA'* sobre *BC* y *CAB'* sobre *CA* (Figura 6) y luego dibujar los segmentos *AA', BB'* y *CC'*. Es fácil probar que estos tres segmentos son iguales y que concurren en *P*; para ello, se usa congruencia de triángulos y la argumentación dada en la estrategia heurística de la rotación de 60°, rotando *BP* 60° a la derecha y a la izquierda.

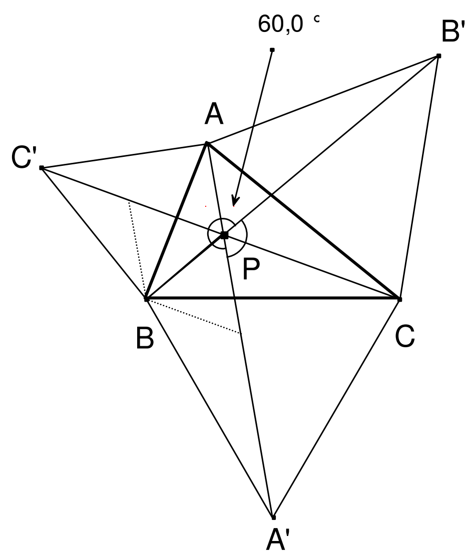


Figura 6. Manera alternativa de localizar *P*.

Así, los tres segmentos determinan el Punto de Fermat y cada uno de estos es igual a *AP*+ *BP*+*CP*. Es decir, si trazamos triángulos equiláteros *BCA'*, *CAB'* y *ABC'*, externos a los lados de cualquier triángulo *ABC*, los segmentos lineales *AA', BB'* y *CC'* son iguales, concurrentes y además tienen un ángulo de 60° uno de otro.

Este problema ha sido abordado por otros (Pedoe 1957, pp. 11-12, citado por Coxeter 1969), encontrándose que el triángulo *ABC* puede no asumirse como acutángulo. La Figura 7 muestra la gráfica de *AP*+ *BP*+*CP* vs *BP*, con Cabri, cuando el ángulo en *A* es de 120°.

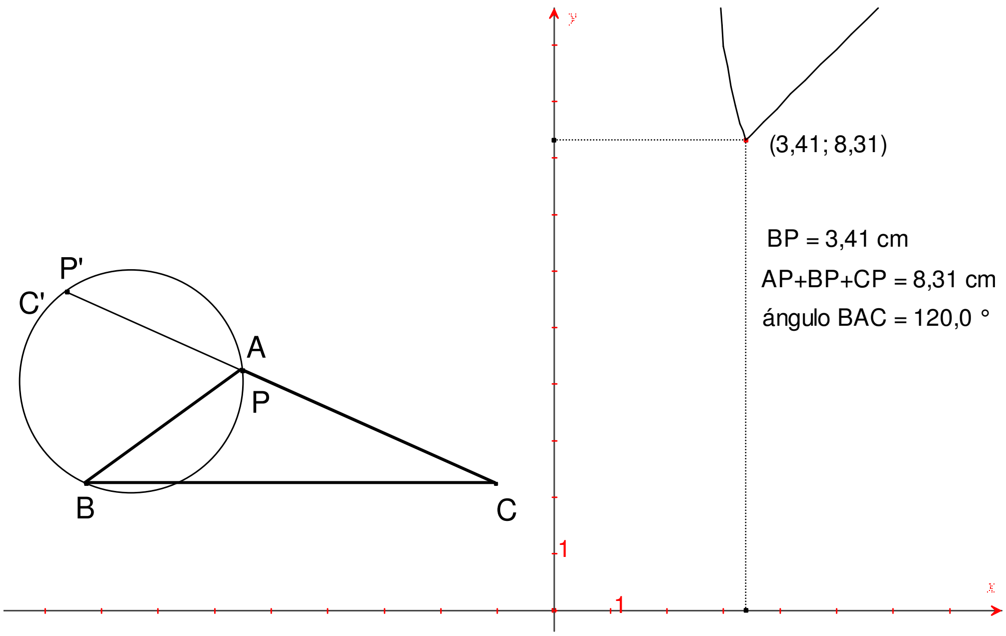


Figura 7. Gráfica de suma de distancias vs *BP*.

Si ΔABC posee un ángulo de medida mayor o igual a 120°, la solución es más elaborada, pero puede demostrarse que *P* coincide con el vértice del ángulo mayor; Cabri permite visualizar que, efectivamente, así es.

Teorema. Si el triángulo *ABC* posee un ángulo cuya medida es mayor o igual que 120°, entonces el punto *P*, que hace mínima la suma de las distancias a los vértices, está en el vértice del ángulo mayor.

Demostración**. Dado el ΔABC, sea $\angle ABC = \gamma \geq 120°$. Se debe probar que sin importar dónde se encuentre *P*:** $AB + BC < AP + BP + CP$.

Llamemos $\alpha = \angle ABP$ y $\beta = \angle CBP$.

Tenemos tres casos:
1. *P* está en el interior del ángulo $\angle ABC = \gamma$.
2. *P* está en el interior del ángulo adyacente a $\angle \gamma$.
3. *P* está en el interior del ángulo opuesto a γ.

Caso 1. *P* está en el interior del ángulo $\angle ABC = \gamma$ (Figura 8).

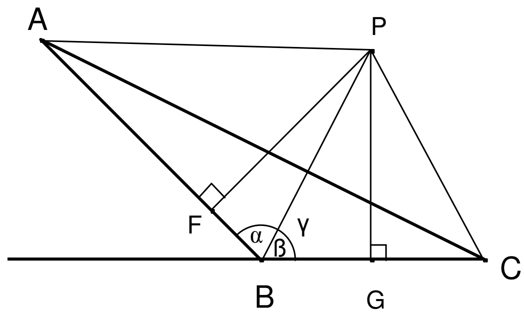


Figura 8. Suma mínima cuando P está en el interior de γ.

Tenemos que $\angle ABP + \angle CBP = \alpha + \beta = \gamma$. Se Trazan las perpendiculares desde P hasta AB y BC, siendo F y G sus intersecciones respectivas. Entonces

$$\left.\begin{array}{l} FB = x = BP\cos(\alpha) \\ BG = y = BP\cos(\beta) \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Además,

$$\left.\begin{array}{l} AB = AF + x \\ BC = GC + y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad AB + BC = AF + GC + x + y \qquad (**)$$

$$\begin{aligned} De \quad (*): \qquad x + y &= BP\cos(\alpha) + BP\cos(\beta) = BP\left(\cos(\alpha) + \cos(\beta)\right) \\ &= 2BP\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ &\leq 2BP\cos(60°)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = BP\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \leq BP \end{aligned}$$

Sustituyendo este último resultado en (**):

$$AB + BC = AF + GC + x + y \leq AF + GC + BP$$

Y considerando los triángulos rectángulos PFA y PGC, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} AF < AP \\ GC < CP \end{array}\right\} \quad \text{De donde se tiene que:} \quad AB + BC < AP + BP + CP \,,$$

como se quería probar.

Caso 2. P está en el interior del ángulo adyacente a $\angle\gamma$ (Figura 9).

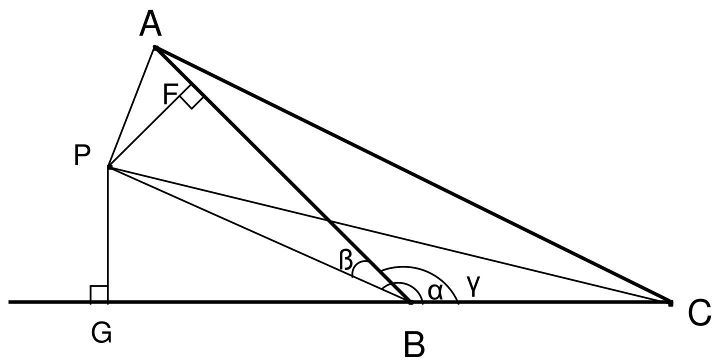


Figura 9: Suma mínima cuando P está en el ángulo adyacente a γ.

Sin perdida de generalidad, supongamos que $\angle CBP - \angle ABP = \alpha - \beta = \gamma$.

Trazamos las perpendiculares desde P hasta AB y la prolongación de CB; sean F y G sus intersecciones. Como ΔBFP y ΔBGP son triángulos rectángulos, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} FB = x = BP\cos(\beta) \\ GB = y = BP\cos(180-\alpha) = -BP\cos(\alpha) \end{array}\right\} \text{———————} \quad (I)$$

Como P está en el interior del ángulo adyacente a $\gamma \geq 120^\circ$, entonces $\beta \leq 60°$; además:

$$180^\circ \geq \alpha \geq \gamma \geq 120^\circ \quad \Rightarrow \quad -\cos(\alpha) > 0 \text{ y } \cos(\beta) > 0.$$

Entonces: $$\left.\begin{array}{l} AB = AF + x \\ CB = CG - y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad AB + BC = AF + GC + x - y \text{ ————} \quad (II)$$

De (I) tenemos que:

$$\begin{aligned} x - y &= BP\cos(\beta) - [-BP\cos(\alpha)] = BP(\cos(\beta) + \cos(\alpha)) \\ &= 2BP\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2BP\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ &\leq 2BP\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos(60°) = BP\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq BP \end{aligned}$$

Sustituyendo en (II) resulta:

$$AB + BC = AF + GC + x - y \leq AF + GC + BP$$

Pero en los triángulos rectángulos ΔPFA y ΔPGC se cumple que: $\left.\begin{array}{l} AF < AP \\ GC < CP \end{array}\right\}$

De donde obtenemos desigualdad buscada: $AB + BC < AP + BP + CP$.

Caso 3. *P* está en el interior del ángulo opuesto a γ (Figura 10).

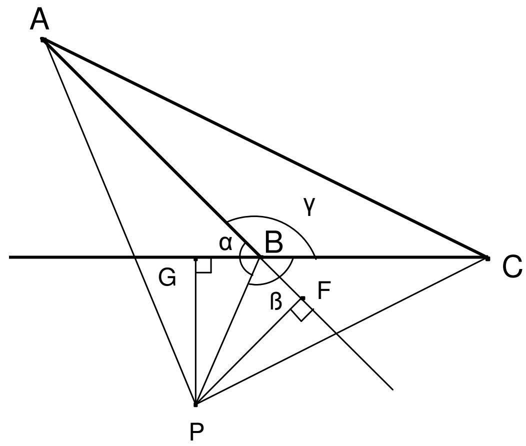


Figura 10: Suma mínima cuando *P* está en el ángulo opuesto a γ.

En este caso tenemos que $\alpha+\beta = 360° - \gamma$. Sean *F* y *G* los puntos de los pies de las perpendiculares trazadas desde *P* a las prolongaciones de AB y CB, respectivamente; Puede ocurrir que *a*) $180^o < \gamma+\alpha \leq 270^o$; o *b*) $270^o < \gamma+\alpha \leq 360^o - \beta$.

Aquí, consideramos el sub caso *a*), ya que el otro es similar.

Para desarrollar la demostración, es necesario establecer la siguiente convención: "la distancia de un punto *P* a un lado de un triángulo se considera positiva, cuando el punto está en el interior del ángulo del triángulo generado por ese lado y algún otro; y se considera negativa cuando esté en el exterior".

En la Figura 11, las distancias a los lados del ΔABC son las medidas de los segmentos PR, PS *y* PT. Las distancias de PR *y* PT se consideran positivas, en tanto que PS es negativa.

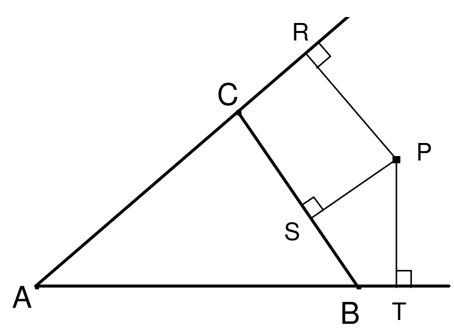


Figura 11: Convención sobre distancias positivas y negativas.

Demostración. *a*) $180^{o} < \gamma + \alpha \leq 270^{o}$.

Sean $\psi = \angle GBP$ y $\varphi \angle PBF$, entonces: $\psi = \gamma + \alpha - 180°$ ———— (I)

de (I) se tiene que: $\cos(\psi) = -\cos(\gamma + \alpha)$,

pero $\alpha + \beta = 360^{o} - \gamma$

entonces $\gamma + \alpha = 360^{o} - \beta \Rightarrow \cos(\gamma + \alpha) = \cos(360^{o} - \beta)$.

de ahí que: $\cos(\psi) = -\cos(\gamma + \alpha) = -\cos(360^{o} - \beta) = -\cos(\beta)$

Así: $GB = y = -BP\ \cos(\beta)$ ———— (II)

Análogamente, $\varphi = \beta - \angle CBF$; pero $\angle CBF = \angle GBA$, por ser opuestos por el vértice, y como $\angle GBA = \alpha - \psi$, entonces:

$$\varphi = \beta - (\alpha - \psi) = \beta - \alpha + \psi \quad \text{————} \quad \text{(III)}$$

Sustituyendo (I) en la ecuación (III) resulta:

$$\varphi = \beta - \alpha + \gamma + \alpha - 180° = \beta + \gamma - 180°$$

Por lo que: $\cos(\varphi) = \cos(\beta + \gamma - 180°) = -\cos(\beta + \gamma)$

pero $\alpha + \beta = 360^{o} - \gamma$, de donde: $\beta + \gamma = 360^{o} - \alpha$

por lo que: $\cos(\varphi) = -\cos(360^{o} - \alpha) = -\cos(\alpha)$

Finalmente: $BF = x = -BP\ \cos(\alpha)$ ———— (IV)

Luego tenemos que: $\left.\begin{array}{l} AB = AF + x \\ CB = CG + y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad AB + BC = AF + GC + x + y$ ———— (V)

Pues *x* e *y* son consideradas distancias negativas. Ahora bien de (II) y (IV) tenemos:

$$\begin{aligned} x + y &= -BP\cos(\alpha) + [-BP\cos(\beta)] = -BP(\cos(\alpha) + \cos(\beta)) \\ &= -2BP\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = -2BP\cos\left(\frac{360°-\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ &= -2BP\cos\left(180° - \frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2BP\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

Pero $\gamma \geq 120°$, por lo que $\frac{\gamma}{2} \geq 60°$, es decir, $\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq \cos(60°) = ½$

Por lo que:

$$x + y = 2BP\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \leq 2BP\cos(60°)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = BP\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \leq BP$$

Sustituyendo este resultado en (V):

$$AB + BC = AF + GC + x + y \leq AF + GC + BP \quad \text{————} \quad (VI)$$

y como los triángulos PFA y PGC son rectángulos, se cumple que:

$$AF < AP, \quad GC < CP \qquad (VII)$$

Por último, sustituyendo la relación (VII) en (VI) obtenemos:

$$AB + BC < AP + BP + CP$$

como queríamos demostrar.

Comentarios finales

Es claro que el uso de la computadora, con el software dinámico, es una herramienta que permite al estudiante establecer un diálogo entre la deducción y la experimentación; además, facilita la exploración de diversos casos y da acceso a situaciones en donde es posible encontrar el sentido de algunas ideas matemáticas. Esto es, el uso del software ayuda al estudiante a realizar trabajo empírico y puede proporcionar bases para realizar una demostración formal; la combinación del trabajo del estudiante en los medios tecnológicos y con diferentes formas de representación, contribuye al aprendizaje de los conceptos involucrados.

Sin embargo, es importante señalar que no se está planteando el uso de la tecnología como un sustituto del maestro; si bien es cierto que es un recurso que puede contribuir a la evolución del entendimiento de una determinada situación, en problemas como el aquí planteado seguramente los estudiantes requerirán de la orientación y ayuda que sólo el maestro competente puede proporcionar, así como para sistematizar y complementar las ideas relevantes que emergieron o que aparecen relacionadas durante la resolución del problema. Conviene remarcar que el uso de algún recurso tecnológico no garantiza que el estudiante entienda los principios matemáticos que surgen de determinada exploración, y se debe tener presente que, en ocasiones, la tecnología puede dar una representación gráfica incompleta o no proporcionar la información requerida, como es el caso de segmentos negativos que se definieron para poder probar el tercer caso del teorema presentado en la última parte.

Finalmente, la visualización matemática basada en la computadora es solamente una faceta del papel que representa el uso de la computadora en el estudio de las matemáticas. La visualización debe estar ligada a los procesos simbólicos, lógicos y formales, propios de la matemática, para alcanzar mejores resultados en el aprendizaje.

Referencias

Alarcón, B. J. (1994). *Libro para el Maestro de Educación Secundaria*. Secretaría de Educación Pública, México.

Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to Geometry*. Second edition, John Wiley & Sons, Inc. Toronto, Canada.

Benítez, M. D. (2006). Planteamiento y resolución de problemas con apoyo de software dinámico. En *Memorias XIV Encuentro de Profesores de Matemáticas*. Área de Matemática Educativa, UMSNH, México.

Duval, R. (1996). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Traducción de uso interno realizada por el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav

IPN, México. Título original *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37-65, IREM de Stramburgo, 1993.

National Council of Mathematics Teachers. (2000). *Principles and Standars for School Mathematics*. NCTM, Reston Va. USA.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press.

Santos, T. L. M. (2004). The role of technology in students' conceptual constructions in a sample case of problem solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Spring Edition.

Zimmerman, W., Cunningham, S. (1995). Visualización Matemática, en *Memorias del CIEAEM 01.95*; Disco flexible, 10/02/95.

Página de Internet. El Problema de Fermat para Torricelli, en http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/Torricelli/node1.html

PROBLEMA DEL TESORO Y EL ABEDUL

Prof. Juan Antonio Pichardo Corpus — japc34@hotmail.com
Dr. Armando Sepúlveda López — asepulve@live.com.mx
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

En este trabajo se analiza un problema geométrico planteado en un contexto que puede resultar atractivo para los estudiantes, que involucra conceptos fundamentales del currículum como punto medio de un segmento, mediatriz, circunferencia. Existe una gran diversidad entre las posibles representaciones que toma la configuración del problema, debido a que depende de la decisión inicial que se tome respecto a la ubicación de tres puntos específicos, contribuyendo esto a la dificultad en resolverlo; sin embargo, la incorporación de un sistema de coordenadas permite encontrar la solución. Aquí se examinan dificultades y etapas del proceso de resolución de problemas y se destaca el uso de recursos y el potencial que representa el software dinámico para obtener ideas que, sin duda, contribuyen a la solución. Además, se dan argumentos geométricos que la convalidan.

Introducción

El aprendizaje de las matemáticas es concebido por Schoenfeld (1998) como un proceso continuo que se ve favorecido en un ambiente de resolución de problemas, donde los estudiantes tienen oportunidad de desarrollar formas de pensar que son consistentes con el quehacer de la disciplina. En este sentido, el NCTM (2000) sugiere organizar el currículum escolar alrededor de la resolución de problemas, donde resulte relevante que los estudiantes desarrollen distintos recursos y estrategias para plantear y resolver diferentes tipos de problemas. Además, también se reconoce la necesidad de crear un ambiente de trabajo donde los estudiantes tengan oportunidad de presentar y defender sus ideas ante sus compañeros, así como escuchar y examinar ideas de otros para robustecer su comprensión de los contenidos y conceptos matemáticos y fortalecer su habilidad para resolver problemas. Así, resulta importante que los problemas o tareas se transformen en una plataforma donde los estudiantes formulen conjeturas, utilicen distintas representaciones, empleen varios caminos de solución y comuniquen sus resultados.

Lo propósitos de la propuesta curricular del NCTM (2000) se pretenden lograr a través de seis principios y diez estándares, donde se flexibiliza la visión del orden tradicional en que deben cubrirse los contenidos matemáticos y se enfatiza en el desarrollo de procesos de pensamiento, desde el primer año escolar hasta concluir el bachillerato. Los principios establecen la filosofía de la educación a la que se aspira con ese proyecto educativo y los estándares son criterios, previamente establecidos, sobre los contenidos matemáticos mínimos a cubrir y los procesos de pensamiento que se pretende promover en los estudiantes; en ambos casos, es común que en un problema aparezcan entrelazados varios de estos principios y estándares. El principio de la tecnología establece que el uso de la tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, influye en las matemáticas que se enseñan en la escuela y aumenta las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes.

En cuanto a las líneas de contenido, la geometría es una de las ramas de las matemáticas que más frecuentemente aparece en el currículo matemático del nivel básico; ofrece un ambiente natural para que los estudiantes desarrollen habilidades de descripción dimensional, de imaginación espacial, de razonamiento y justificación de resultados. Efectivamente, los contenidos geométricos se empiezan a estudiar desde la educación primaria, en donde la intención es tener un acercamiento inicial intuitivo a los cuerpos y figuras geométricas. Posteriormente, se estudian las proposiciones euclidianas; el estudiante debe aprender los teoremas fundamentales que son más utilizados en su educación escolar, como el Teorema de Pitágoras y el Teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo. Así, dependiendo del nivel y orientación del programa escolar, se profundiza en las demostraciones.

Además, desde la antigüedad la función formativa de la geometría ha sido esencial en el desarrollo personal de profesores, profesionales de la educación matemática y, en general, de toda persona educada, pues presenta valores insustituibles que Thom (1973) resume en tres puntos: a) la geometría proporciona distintas formas de ver las cosas en todas las áreas de las matemáticas y de otras ciencias; b) las interpretaciones geométricas proporcionan visiones directoras del entendimiento intuitivo y permite avanzar en la mayoría de las áreas de las matemáticas; y c) las técnicas geométricas proporcionan herramientas eficaces para resolver problemas en casi todas las áreas de las matemáticas.

Por otra parte, ya desde el nivel de educación secundaria del sistema educativo mexicano, en la reforma curricular se plantea el objetivo "que los alumnos aprendan a plantear y resolver problemas en distintos contextos, así como a justificar la validez de los procedimientos y resultados y a utilizar adecuadamente el lenguaje matemático para comunicarlos" (SEP, 2007, pág. 34). La importancia que se asigna a la justificación de resultados se refuerza aún más cuando se revisan las competencias que debe alcanzar un alumno: el planteamiento y resolución de problemas, la argumentación, la comunicación y el manejo de técnicas. En consecuencia, en el salón debe promoverse que los estudiantes vean la necesidad de argumentar; la SEP (2006) ubica tres niveles de argumentación de acuerdo con su complejidad y su finalidad:

> para explicar, para mostrar o justificar informalmente o para demostrar… el énfasis de la argumentación se pondrá en la explicación y la muestra, y sólo en ciertos casos, en tercer grado, los alumnos conocerán algunas demostraciones con ayuda del maestro, con la idea de que las utilicen para resolver y validar la solución de otros problemas. (p. 18)

Ahora bien, en relación con los problemas que promueven el aprendizaje de los estudiantes, Santos (1997) sistematiza las características que deben reunir, entre ellas: deben resultar atractivos para los estudiantes y demandar un proceso de pensamiento y meditación, es decir que no se resuelvan inmediatamente; deben poderse resolver desde diferentes ángulos y que no involucren trucos o procedimientos muy sofisticados. Además, respecto a la utilización de la tecnología, Santos (2004) ilustra el potencial del software dinámico en la construcción de configuraciones simples, que permiten visualizar y establecer distintas conexiones de conceptos como desigualdad triangular, el estudio de las cónicas y otros. Es decir, la utilización de la tecnología con un software dinámico como Cabri géomètre, contribuye al desarrollo de la intuición y puede hacer posible que el estudiante vea lo que antes era inadvertido, potenciando así el aprendizaje.

El problema que presentamos enseguida, fue propuesto por Sáenz (2001, p. 49) a estudiantes de bachillerato como trabajo voluntario para realizarse en sus casas con lápiz y papel. En su reporte, Sáenz manifiesta que ningún estudiante lo resolvió; la mayor parte de los intentos fueron hechos con trazos y procedimientos propios de la geometría euclideana, ninguno de ellos usó coordenadas.

A continuación abordamos el problema, haciendo énfasis durante el proceso de solución en las fases relacionadas con el entendimiento del problema, el plan de solución, la ejecución del plan y la revisión de trabajo realizado (Polya, 1945); en este proceso, se incorpora el uso del software dinámico como un medio que permite explorar, producir conjeturas, argumentar y eventualmente llegar a la solución.

El Problema del tesoro y el abedul

Roberto ha encontrado un pergamino que muestra una isla desierta donde está enterrado un tesoro. En dicha isla hay tres árboles: un abedul, un roble y un pino. El pergamino dice así:

“Desde el abedul, camina hacia el roble contando los pasos: Bajo el roble debes girar un ángulo recto hacia la derecha y dar el mismo número de pasos. Marca una cruz en el suelo. Vuelve al abedul y camina hacia el pino contando los pasos. Bajo el pino gira un ángulo recto hacia la izquierda y camina el mismo número de pasos. Marca otra cruz en el suelo. Cava en el punto medio de las dos cruces. Allí está el tesoro.”

Al ir a buscar el tesoro, Roberto encontró que el abedul había desaparecido, sólo quedaban el pino y el roble. ¿Podrías ayudarle a encontrar el tesoro?

Entendimiento del problema. ¿Qué objetos matemáticos aparecen en el problema?, ¿cómo se puede representar el enunciado?, ¿qué sentido le puede asignar un estudiante a la pregunta planteada? La idea es que los estudiantes comiencen a pensar el problema en términos de preguntas que los guíen en la búsqueda, representación y exploración de relaciones matemáticas (Santos, 2007).

Con el software Cabri géomètre, podemos representar el problema (Figura 1); A representa el abedul, R el roble, P el pino, W y Z las marcas respectivas y T el punto medio de WZ, es decir donde se encuentra el tesoro.

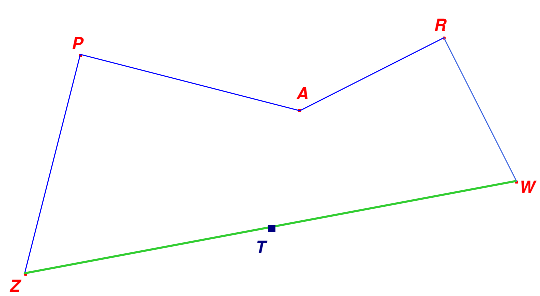


Figura 1: Representación del problema, de acuerdo con el pergamino.

Una pregunta inicial es: ¿se puede encontrar el punto T si no se conoce A?, Cabri permite interactuar con los objetos y hacer exploraciones con distintos casos particulares. La Figura 2 muestra tres representaciones diferentes; en cada caso P y R son fijos y A es el punto que esta variando. Con este tipo de interacción es posible observar que no importa donde esté A, T es un punto fijo y se encuentra en el punto medio de WZ, ¿a qué se debe esto? Como puede verse, las representaciones tienen apariencia muy distinta.

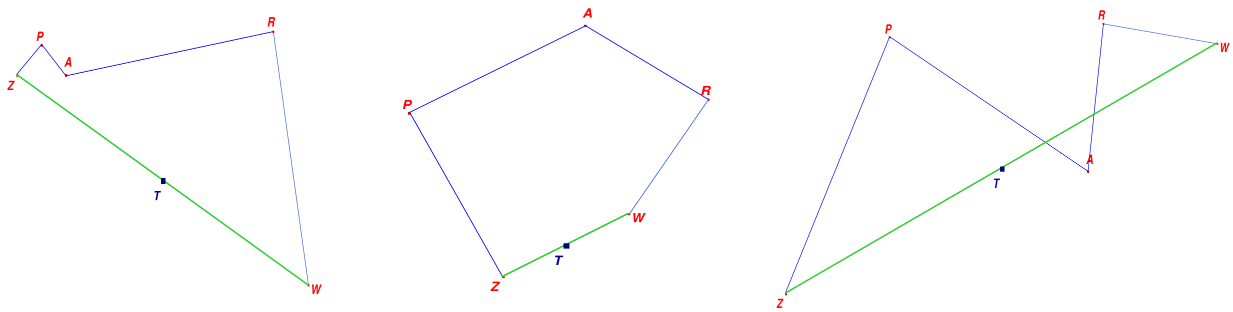


Figura 2. Posibles caminos derivados de las instrucciones del pergamino.

Surge una conjetura: Si P y R son fijos no importa donde esté A, T es punto fijo. Para confirmarla o desecharla podemos hacer algunos trazos que nos lleven a establecer relaciones; pronto llegaremos a parejas de triángulos congruentes, pero quizás la gran diferencia entre las distintas representaciones no nos permitirá conformar argumentos en un sentido u otro. Sin embargo, la manipulación de los elementos del problema con el software puede propiciar un conflicto en el que no importa la posición de A.

Plan de solución y ejecución. Las dificultades para elaborar argumentos propios de la geometría euclideana respecto a la nula importancia de la ubicación de A, nos lleva a plantear la necesidad de incluir un sistema coordenado cartesiano, lo cual es sencillo utilizando el software. La Figura 3 muestra el sistema coordenado con A ubicado en el origen.

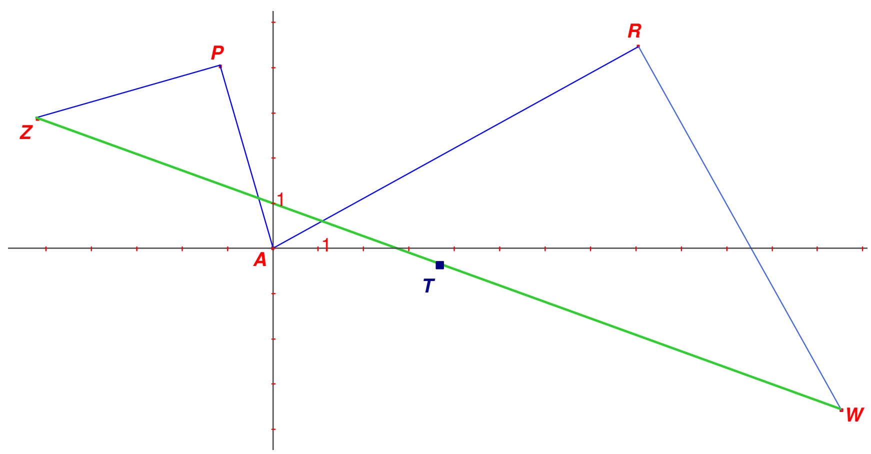


Figura 3. Problema del abedul en un sistema coordenado cartesiano.

Utilizando esta representación, procedamos a demostrar que la ubicación de T no depende de la posición del punto A. Asignemos coordenadas a los puntos como en la Figura 4.

Sean (b, c) y (d, e) las coordenadas de R y W, respectivamente, se puede observar la congruencia de los triángulos ARB y WRS, lo cual implica que $d = b + c$ y $e = c - b$, por lo tanto las coordenadas de W dependen de las de R. De manera similar, considerando las coordenadas de P y Z con (f, g) y (h, i), respectivamente, se puede concluir que $h = f - g$ y $i = f + g$; concluyendo así que las coordenadas de Z dependen de las coordenadas de P. Por lo tanto no importa donde se encuentre A.

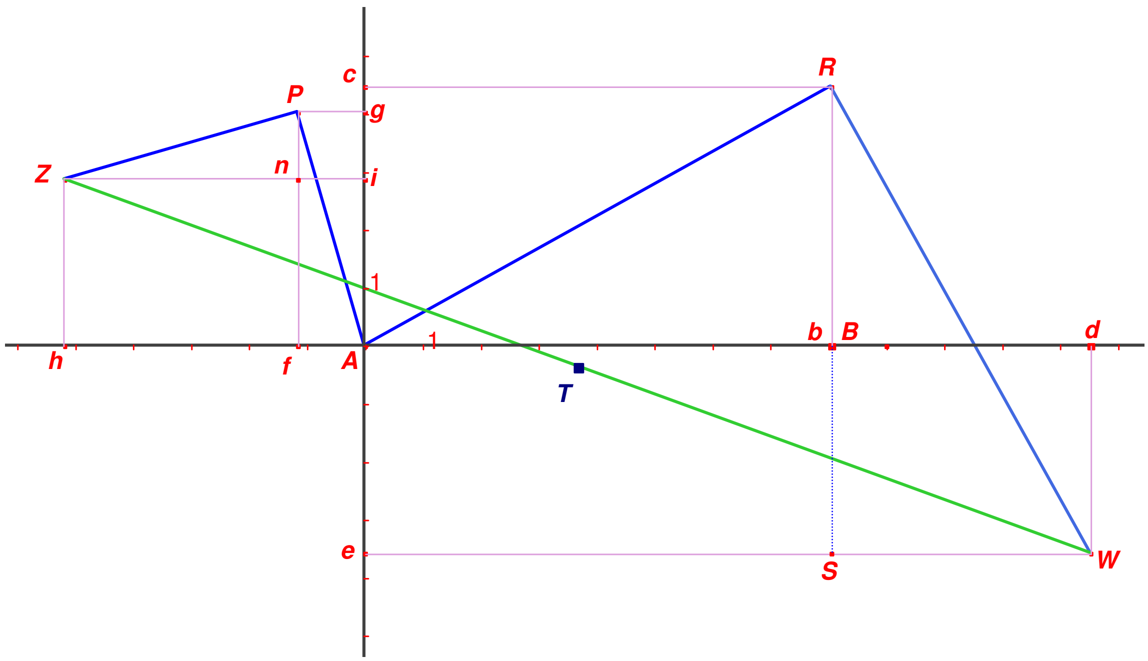


Figura 4. Asignación de coordenadas.

En consecuencia para hallar el tesoro basta con posicionarse en cualquier punto y tomarlo como A (el abedul), luego realizar las indicaciones en el papiro.

¿Esta es la única forma de encontrar el tesoro?

Regresando a la representación inicial del problema, se puede conjeturar que la mediatriz de PR pasa por T y más aun, que T es la intersección de dicha mediatriz y el círculo de diámetro PR (Figura 5). Es posible explorar casos distintos y observar que esto siempre ocurre.

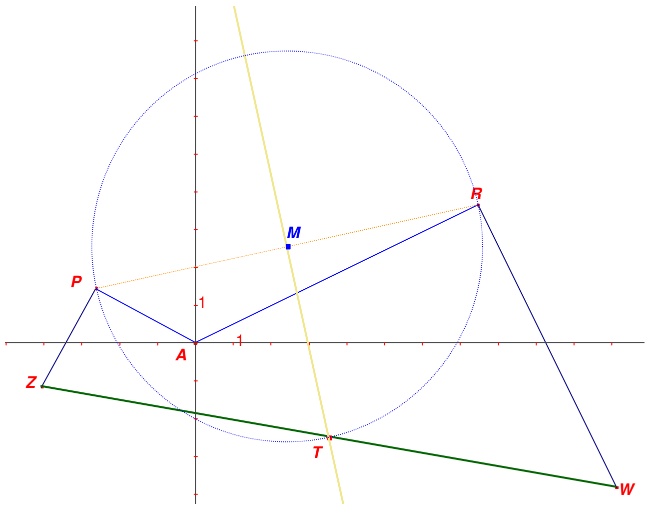


Figura 5. La mediatriz de PR pasa por T.

Demostración. Como ya se probó, las coordenadas de W y Z dependen de las coordenadas de P y R, respectivamente; por lo tanto, las coordenadas de T se pueden expresar en función de P y R.

Las coordenadas de T son $\left(\frac{b+c+f-g}{2},\frac{f+g+c-b}{2}\right)$,

entonces hay que demostrar que esta pareja ordenada es una solución del sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la circunferencia de diámetro PR y la recta mediatriz de PR.

La ecuación de la circunferencia se obtiene con las coordenadas de m punto medio de PR y la distancia de M a R, el radio.

Las coordenadas de M son $\left(\frac{b+f}{2},\frac{c+g}{2}\right)$,

la distancia MR está dada por $\sqrt{\left(b-\frac{f+b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{g+c}{2}\right)^2}$,

y la ecuación de la circunferencia con centro en M y radio MR es

$$\left(x-\frac{f+b}{2}\right)^2+\left(y-\frac{g+c}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\left(b-\frac{f+b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{g+c}{2}\right)^2}\right)^2 \quad \text{(i)}$$

Para obtener la ecuación de la recta mediatriz de PR, primero se encuentra la ecuación de la recta PR

$$y-g=\frac{c-g}{b-f}(x-f) \quad \text{(ii)}$$

luego, la ecuación de la recta mediatriz resulta

$$y-\frac{g+c}{2}=\frac{f-b}{c-g}\left(x-\frac{f+b}{2}\right) \qquad \text{(iii)}$$

Sustituyendo (iii) en (i)

$$\left(x-\frac{f+b}{2}\right)^2+\left(\frac{f-b}{c-g}\left(x-\frac{f+b}{2}\right)+\frac{g+c}{2}-\frac{g+c}{2}\right)^2=\left(b-\frac{f+b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{g+c}{2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{f+b}{2}\right)^2+\left(\frac{f-b}{c-g}\left(x-\frac{f+b}{2}\right)\right)^2=\left(b-\frac{f+b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{g+c}{2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{f+b}{2}\right)^2\left[\left(\frac{f-b}{c-g}\right)^2+1\right]=\left(\frac{b-f}{2}\right)^2+\left(\frac{c-g}{2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{f+b}{2}\right)^2=\frac{\left(\frac{b-f}{2}\right)^2+\left(\frac{c-g}{2}\right)^2}{\left(\frac{f-b}{c-g}\right)^2+1}=\frac{(c-g)^2}{4}$$

de donde $\quad x_1=\dfrac{f+b+c-g}{2}\quad$ y $\quad x_2=\dfrac{f+b+g-c}{2}$.

Claramente, x_1 coincide con la coordenada en x del punto T.

Por último, se sustituye x_1 en (iii)

para obtener $\quad y-\dfrac{g+c}{2}=\dfrac{f-b}{c-g}\left(\dfrac{f+b+c-g}{2}-\dfrac{f+b}{2}\right),$

por lo tanto $\quad y=\dfrac{f-b+g+c}{2}$.

Entonces si queremos encontrar el tesoro, sería suficiente con encontrar el punto medio del segmento que une el pino y el roble y caminar por la mediatriz la misma cantidad de pasos que del roble al punto medio.

Como puede observarse, la recomendación para encontrar el tesoro es simple y práctica, la cual se derivó de la incorporación de coordenadas y del auxilio del software; sin embargo, la justificación con argumentos geométricos puede ser más elaborada, debido a la gran variación de la configuración inicial por las múltiples direcciones que se pueden tomar desde el abedul.

Independientemente de la configuración obtenida del pergamino, es posible dar una argumentación geométrica que confirma y refuerza la solución con coordenadas. Sea cual fuere la posición de los árboles (tan variables como los de la Figura 1), podemos observar que siempre se obtiene un par de circunferencias homotéticas que se intersecan, con razón entre sus radios de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Para ello, procedemos de la siguiente manera: localizamos el punto medio M de PR y T de WZ, luego trazamos las circunferencias de diámetro PR y de radio TP las cuales, efectivamente, tienen razón de homotecia $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y no dependen de la posición del punto A, como se muestra en la

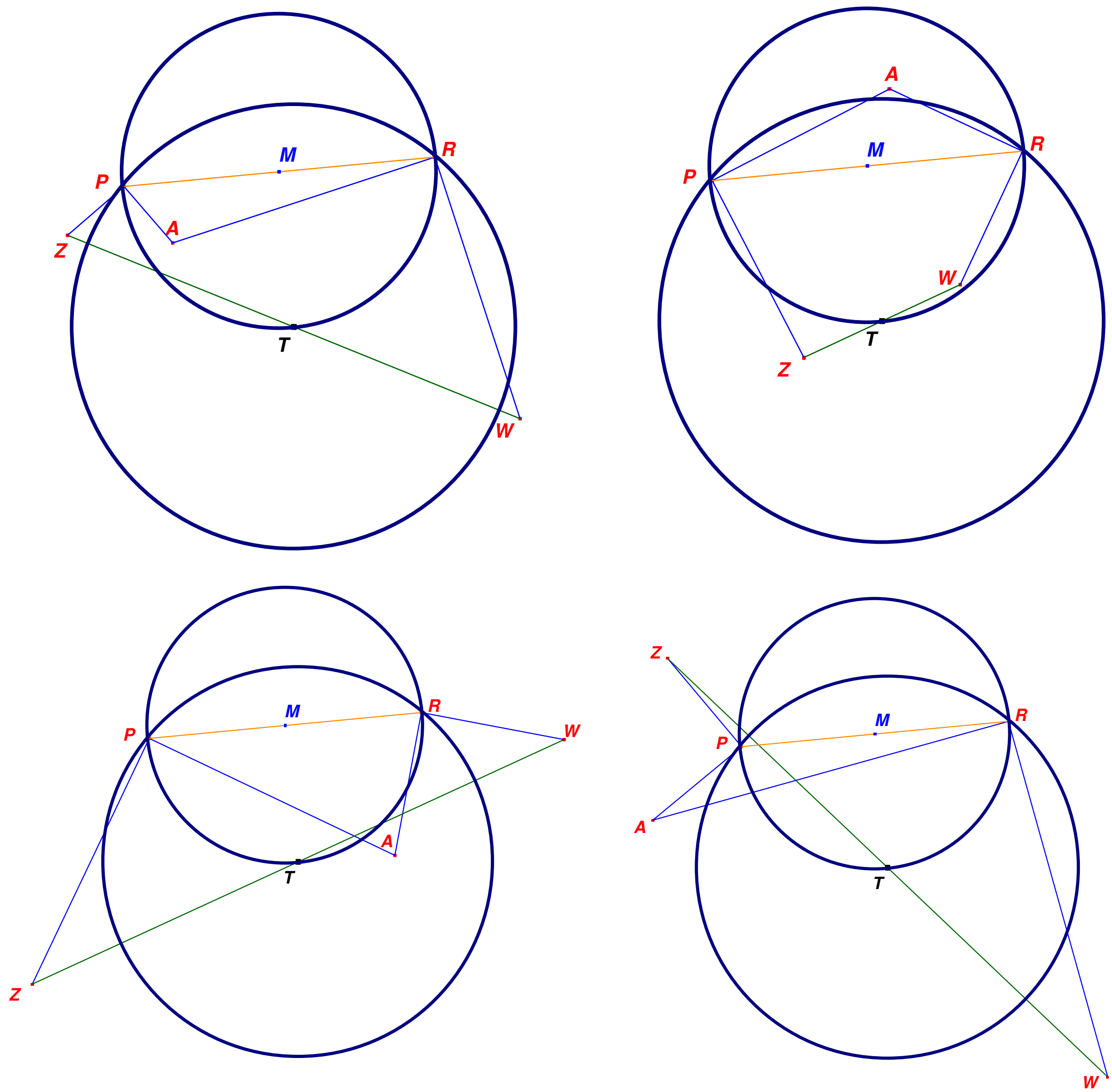


Figura 6: Circunferencias homotéticas para distintas posiciones de A.

Comentarios finales

El uso del software dinámico ofrece a los estudiantes oportunidades para pensar y abordar los problemas desde perspectivas muy distintas y complementarias (Santos 2007). Las representaciones dinámicas permite a los estudiantes, inicialmente, realizar exploraciones, valorar dificultades y contribuye al desarrollo de la visualización de los componentes del problema e identificar y explorar algunas relaciones. Además, es fácil cuantificar atributos como longitudes de segmentos, perímetros, áreas, pendientes, medidas de ángulos y observar cómo estos atributos cambian cuando ciertos objetos se mueven en la representación del problema.

La intención es que este tipo de interacción con el software dinámico propicie que los estudiantes formulen preguntas, utilicen distintas representaciones, se planteen conjeturas para confirmarlas o desecharlas, establezcan relaciones. Así, la combinación del uso de distintas herramientas (computadora, calculadora, lápiz y papel) ayudará a los estudiantes a explorar y sustentar con argumentos, empíricos y formales, los problemas y afirmaciones geométricas.

Referencias

Alarcón, B. J. (1994). *Libro para el Maestro de Educación Secundaria*. México: Secretaría de Educación Pública, México.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics. USA.

Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton: Princeton University Press. USA.

Sáenz, C. C. (2002). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. En *Investigación en Educación Matemática,* Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática p.p. 47-62.

Santos, M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Santos Trigo, M (2004). Exploring the triangle inequality and conic sections using interactive software for geometry. En *Mathematics Teacher*, Vol. 97 No. 1, (pp. 68-72). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics. USA.

Santos, M. (2007). *La resolución de Problemas Matemáticos. Fundamentos Cognitivos*, México: Biblioteca de la ANPM, Trillas, México.

SEP. (2006). *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de Estudio 2006*

SEP. (2007). *Educación Básica. Secundaria. Plan de Estudios 2006.*

Schoenfeld, A. H. (1998). Reflections on a course in mathematical problem solving. En *Research in Collegiate Mathematics Education III*, Alan H. Schoenfeld, Jim Kaput, Ed Dubinsky (Eds) pp. 81-113. Providence: American Mathematical Society. USA.

Thom, R. (1973). Matemáticas de hoy y matemáticas de siempre. En *La enseñanza de la matemática moderna*, J. Hernández (Ed). Madrid: Alianza Editorial. España.

SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Manuel Santos Trigo
msantos@cinvestav.mx
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN, México.

Introducción

Un objetivo fundamental en la educación matemática es comprender, analizar y documentar las formas en que los estudiantes desarrollan o construyen el conocimiento matemático. La intención es que la comprensión del proceso de desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes proporcione información relevante para generar condiciones y actividades de aprendizaje que fomenten o propicien la construcción del conocimiento matemático. En esta dirección la comunidad diseña y plantea programas de investigación donde se abordan y se discuten temas relacionados con la caracterización de las matemáticas, lo que significa el aprendizaje de la disciplina, las formas de instrucción que promueven el desarrollo del conocimiento matemático y la búsqueda de evidencias que den cuenta de las diversas formas de comprensión y desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

En general, un programa de investigación se acompaña o fundamenta a partir de una conceptualización de las matemáticas (¿qué es o cómo se caracterizan las matemáticas?) y de las posibles maneras en que los estudiantes pueden construir ese conocimiento matemático (¿qué significa que los estudiantes aprendan matemáticas?). Así, los profesores de matemáticas, que son los que propician condiciones y proponen actividades de aprendizaje para que los estudiantes desarrollen un razonamiento y resuelvan problemas matemáticos, deben no solamente poseer una formación sólida en la disciplina; sino también interpretar y orientar el desarrollo del conocimiento de los estudiantes. ¿Qué significa que los profesores tengan un conocimiento sólido y robusto de las matemáticas? ¿Qué conocimiento o contenido matemático y a qué profundidad deben dominar los profesores de matemáticas a nivel básico o preuniversitario? ¿Cómo los profesores pueden construir un pensamiento sólido o profundo de la disciplina? Por ejemplo, Gueudet (2008) afirma que la construcción de un pensamiento robusto incluye el establecimiento de una red de conexiones de diversos tipos de conocimiento matemático y formas de razonar.

Es evidente que los profesores de matemáticas deben comprender y utilizar los conceptos fundamentales que deben enseñar; sin embargo, es importante identificar las rutas que puedan seguir para desarrollar un conocimiento robusto de la disciplina. En particular, es relevante distinguir aquellos conceptos o contenidos esenciales que se deben estudiar, por ejemplo a nivel preuniversitario, que les permitan a los profesores de matemáticas no sólo reconocer los resultados relevantes, sino también diversas formas de utilizarlos en la comprensión de otros conceptos en la resolución de problemas. Por ejemplo, en la solución de problemas no rutinarios es necesario que los profesores y estudiantes identifiquen y accedan al conjunto de resultados que les ayudarán a resolver los problemas de manera eficiente. Además, resulta importante que el profesor conceptualice a los problemas como un punto de partida para buscar conexiones y posibles extensiones y también la búsqueda de diferentes maneras de resolver un problema.

¿Qué formación matemática y didáctica deben recibir los futuros profesores de matemáticas? ¿Cómo mantener vigente los conocimientos pedagógicos y matemáticos de los profesores en servicio? ¿Quiénes deben participar en los programas de formación y actualización de los profesores de matemáticas? David & Simmt (2006) sugieren que los programas de preparación de los profesores deben enfocarse sobre la construcción de sus ideas matemáticas que les permitan apreciar relaciones, interpretaciones, y el empleo de varios tipos de argumentos para validar conjeturas y relaciones mas que estudiar cursos formales de matemáticas. "El conocimiento matemático que se necesita para la enseñanza no es un versión diluida de las matemáticas formales; sino un área seria y demandante del trabajo matemático (Davis & Simmt, 2006, p. 295).

En este contexto, se sugiere que el conocimiento pedagógico y matemático de los profesores debe ser abordado, revisado y extendido dentro de una comunidad intelectual que promueva un método inquisitivo y de reflexión. Los participantes en esa comunidad deben incluir matemáticos, educadores matemáticos y los propios profesores con la intención de construir trayectorias potenciales de aprendizaje que orienten las prácticas de instrucción. Es decir, los profesores necesitan interactuar dentro de una comunidad que les motive y les proporcione un suporte colegiado donde puedan compartir y discutir ideas que les permitan enriquecer sus conocimientos matemáticos y estrategias de resolución de problemas. Además, esta comunidad debe favorecer y analizar el uso sistemático de diversas herramientas computacionales y así identificar y evaluar los caminos o proyectos de innovación que surjan al llevar estos acercamientos a salón de clase.

Aportaciones de la investigación en educación matemática al currículum y a las prácticas de la instrucción

¿Cuáles son los aportes de la investigación de los programas de investigación en educación matemática hacia la organización del currículum y la instrucción?

Existen semejanzas entre los procesos de investigar y de seleccionar e implementar actividades de instrucción que promuevan el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes. La tarea de realizar una investigación en educación matemática implica la identificación de un conjunto de preguntas que servirán de guía durante el desarrollo del estudio. La selección de las preguntas de investigación se basa en un análisis detallado del tema, las metas y las condiciones de desarrollo de la investigación. De la misma manera, el planear un escenario de instrucción incluye reflexionar (plantear y discutir preguntas) acerca del tema en estudio. Por ejemplo, ¿qué significa aprender el concepto de derivada? ¿Cuáles son los recursos y procesos fundamentales alrededor del concepto? ¿Qué tipo de problemas resultan importantes en la construcción del concepto?, etc. Es decir, se examina el tema a estudiar y se identifican trayectorias potenciales de aprendizaje que los estudiantes pueden seguir durante el desarrollo de la instrucción. La visión que aporta la revisión de la literatura en el proceso de desarrollar una investigación, es similar a la forma de estructurar la instrucción a partir de incorporar los resultados de la investigación. Se reconoce que en la construcción del conocimiento matemático resulta fundamental que el estudiante aprenda a formular preguntas y a buscar distintos caminos que le permitan encontrar soluciones o respuestas a esas preguntas. En esta perspectiva resulta importante construir escenarios de aprendizaje donde el estudiante tenga oportunidad de reflexionar acerca del uso de recursos y procesos del quehacer matemático que le permitan extender y robustecer sus formas de plantear y resolver problemas.

La influencia de los marcos de investigación en la instrucción. Un marco de conceptual se define alrededor de los principios que rigen la estructura y desarrollo de un estudio o investigación. En la resolución de problemas, por ejemplo, resulta importante analizar el proceso cognitivo, y no sólo los productos, que muestra el estudiante durante sus experiencias de aprendizaje. Además, en esta perspectiva se han desarrollado constructos teóricos que ayudan a caracterizar el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes en términos de la visión o conceptualización de la disciplina (creencias), los recursos básicos que disponen y puedan acceder durante la comprensión de las ideas matemáticas y la resolución de problemas, las estrategias cognitivas que resultan relevantes en el proceso de solución y las estrategias de monitoreo, evaluación y auto-regulación que guían la resolución de problemas. Estos aspectos han influido no solamente en la forma de estructurar los escenarios de instrucción, sino también en la selección e implementación de actividades de aprendizaje que permitan a los estudiantes revelar y atender el desarrollo de estos constructos. En particular, una instrucción basada en la resolución de problemas intenta crear un microcosmo del quehacer matemático en el salón de clases (Schoenfeld, 2008) que refleje los valores y principios del desarrollo de la disciplina. Términos como problemas no rutinarios, y comunidades de aprendizaje que promuevan los valores del quehacer de la disciplina resultan relevantes en una instrucción basada en la resolución de problemas.

De manera general, en la instrucción matemática es común que converjan principios e ideas asociadas con varios marcos conceptuales y no solamente con un marco específico. La visión de la matemática que se sustenta en un marco teórico también ha influido notablemente las actividades de aprendizaje que se promueven en el salón de clases. En esta dirección, se resalta que aprender matemáticas va más allá de que el estudiante memorice un conjunto de fórmulas o procedimientos que le permitan resolver un determinado tipo de problemas; se reconoce que aprender matemáticas implica que los estudiantes desarrollen y aprecien los valores propios del quehacer de la disciplina. Estos incluyen la tendencia a formular preguntas, representar relaciones, buscar conjeturas, plantear argumentos, resolver problemas, comunicar resultados y plantear problemas. Esta visión de las matemáticas es consistente con la que se promueve en los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM,2000).

> La propuesta refleja las sugerencias e influencia de muchas fuentes. La investigación en educación sirve como base para muchas de las propuestas y aseveraciones que aparecen en el documento acerca de qué es posible para los estudiantes aprender en ciertas áreas de contenido, en ciertos niveles y bajo ciertas condiciones pedagógicas (NCTM, 2000, p xii).

La importancia de los métodos de investigación. Un resultado importante que emerge de la investigación en educación matemática es el reconocimiento de que los estudiantes participan activamente en la construcción de su propio conocimiento matemático. Además, de que la construcción se base en los conocimientos y recursos que los estudiantes han aprendido en sus experiencias previas de aprendizaje. En este contexto, muchos de los métodos utilizados en la investigación para promover la reflexión y fomentar el aprendizaje de los estudiantes incluyen que trabajen en grupos pequeños, participen en discusiones con toda la clase y en la resolución de problemas a través de entrevistas estructuradas. Estos métodos de investigación han sido exportados a la instrucción matemática y ahora es común que los estudiantes durante el desarrollo de una clase discutan problemas con sus compañeros, presenten sus ideas y en algunos casos participen en la resolución de problemas a nivel de entrevista con su profesor. En esta dirección, la participación de los estudiante en grupos pequeños, en la clase y en las entrevistas no sólo resulta un medio para que revelen sus ideas y conozcan las de sus compañeros; sino también como una forma de refinar y extender sus propias ideas. Estas formas de estructurar las actividades de aprendizaje en el salón de clase ha aportado información valiosa relacionada con la evaluación del aprovechamiento o competencias matemáticas de los estudiantes. Además, los mismos problemas que se han utilizado en los programas de investigación se han convertido en recursos importantes para los profesores de matemáticas en la promoción o construcción del pensamiento matemático de sus estudiantes.

Los escenarios de Instrucción. Un resultado de investigación importante de la educación matemática es el reconocimiento de que los estudiantes construyen activamente su propio conocimiento matemático. Además, en ese proceso de construcción resultan relevantes las ideas, recursos, estrategias, y formas de pensar que los estudiantes traen al salón de clases. En este contexto, es común que en la instrucción se consideren escenarios flexibles donde los estudiantes tengan oportunidad de revelar constantemente sus ideas y conocer las de sus compañeros. Además, los estudiantes participan en actividades de resolución de problemas en pequeños grupos, discuten sus ideas y plantean argumentos que le den sustento a sus conjeturas. El profesor organiza y orienta el desarrollo de las actividades y promueve una comunidad de aprendizaje donde se valore la formulación de preguntas, la búsqueda de conjeturas, el uso de distintas representaciones, y la comunicación de resultados. Por supuesto, no existe un formato único acerca de cómo estructurar las distintas actividades de aprendizaje. Cada profesor, de acuerdo a las condiciones propias de su institución, selecciona, organiza e implementa series de actividades que promuevan:

- La participación de los estudiantes en la discusión de tareas o problemas en pequeños grupos
- La presentación de los acercamientos de los estudiantes a los problemas a toda la clase o grupo.
- La retroalimentación y orientación por parte del profesor que permita identificar las estrategias y métodos de solución de los estudiantes y la necesidad de aprender nuevos contenidos.
- La reflexión individual que permita al estudiante incorporar y refinar los distintos acercamientos que aparecieron durante el desarrollo de las actividades.

El currículum matemático. La NCTM (2000) propone un marco con una visión global de las matemáticas que se deben estudiar a nivel pre-universitario. En el documento destacan cinco estándares de contenidos (números y operaciones; geometría y sentido espacial; patrones, relaciones y álgebra; medición, análisis de datos y probabilidad) y cinco estándares de procesos del pensamiento matemático (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representaciones). La visión matemática que promueve el documento ha sido una referencia importante en propuestas curriculares en países como Alemania, Estados Unidos, Portugal, y México entre otros.

La pertinencia y consistencia entre las metas, el espíritu del documento (los estándares) y las propuestas del currículum que emergen al incorporar los principios y la visión que se promueve es un tema importante que debe abordarse directamente entre educadores y profesores de matemáticas. Una reflexión inicial implica discutir los cambios que se demandan en la estructura y organización de los contenidos en una propuesta que reflejen de manera clara los principios y visión matemática de los estándares. Es común encontrar propuestas donde se introduce el uso del lenguaje de los estándares y se mantiene la rigidez y estructura de los contenidos en forma tradicional; o se suman a propuestas tradicionales ciertos apartados que hacen referencia a los propósitos de los estándares.

Santos-Trigo (2007) reporta que varias propuestas curriculares explícitamente identifican a la resolución de problemas como una actividad central en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y el lenguaje en la presentación distingue aspectos del quehacer matemático; sin embargo, no existe claridad en cuanto al significado de organizar un currículum bajo la perspectiva de la resolución de problemas. ¿Cuáles son los contenidos fundamentales de la educación preuniversitaria, por ejemplo, y cómo se estructuran u organizan en términos de actividades de resolución de problemas? ¿Cómo hacer visible en la propuesta la interdependencia entre los contenidos y los procesos del quehacer o práctica de la disciplina? Este tipo de preguntas han estado fuera de la discusión en la agenda de la resolución de problemas y como consecuencia no existe un consenso sobre lo que una propuesta curricular que refleje la resolución de problemas debe incluir mas allá de un discurso que señale la necesidad de fomentar las actividades propias de esta perspectiva.

El reconocimiento de que pueden existir varios caminos para organizar una propuesta del currículum que promueva la resolución de problemas implica la necesidad de explicitar cómo los principios de esta perspectiva se distinguen en la organización y estructura de los contenidos. Por ejemplo, si en la resolución de problemas interesa que los estudiantes identifiquen, representen, exploren y justifiquen diversas conjeturas asociadas con la comprensión de los conceptos matemáticos, entonces resulta esencial que el currículum se organice alrededor de las ideas o conceptos fundamentales que se deben de estudiar de manera profunda en los distintos niveles educativos. Es decir, es necesario transformar las listas extensas de temas o contenidos que aparecían en las propuestas tradicionales del currículum en un conjunto de temas relevantes donde se muestre su desarrollo y las formas de conectarse en diversos dominios que antes se estudiaban de manera independiente como el álgebra, la geometría, la estadística, el cálculo y la probabilidad.

> La resolución de problemas exitosa requiere del conocimiento del contenido matemático, del conocimiento de estrategias de resolución de problemas, de un auto-monitoreo efectivo, y una disposición productiva a plantear y resolver problemas. La enseñanza de la resolución de problemas requiere aún más de los profesors, ya que deben ser capaces de promover tal conocimiento y actitudes en sus estudiantes. …La enseñanza en si misma es una actividad de resolución de problemas (NCTM, 2000, p. 341).

En este contexto, la resolución de problemas es una forma de interactuar y pensar acerca de las situaciones que demandan el empleo de recursos y estrategias matemáticas.

Sobre el uso de herramientas computacionales. Es importante mencionar que el empleo de herramientas computacionales en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes no solamente puede facilitar la identificación e implementación de estrategias de resolución, sino también potenciar o extender el repertorio de las heurísticas (Santos-Trigo, 2008). En este contexto, el uso de la tecnología influyen directamente en la conceptualización y forma de interactuar con los problemas y como consecuencia incide en el desarrollo de una teoría que explique las competencias de los estudiantes. Moreno-Armella & Santos-Trigo (2008) establecen que el uso de herramientas digitales ha permitido la introducción y consideración de aspectos cognitivos matemáticos nuevos en el desarrollo de las competencias de los estudiantes y como consecuencia, ofrecen un potencial para repensar y estructurar nuevas agendas de investigación.

Conviene presentar un ejemplo donde se ilustra el potencial de una herramienta en el proceso de trabajar una tarea o problema que inicialmente se puede considerar de carácter rutinario, pero que un acercamiento inquisitivo, apoyado con una herramienta computacional, los estudiantes lo transforman en oportunidades para identificar y explorar diversas relaciones matemáticas. En el desarrollo de la actividad (Santos-Trigo y Cristóbal-Escalante, 2008) se identifican algunos acercamientos que mostraron estudiantes del nivel bachillerato al trabajar dentro de una comunidad de aprendizaje que promueve el uso de herramientas computacionales en actividades de resolución de problemas. En particular, en la solución de la actividad se destaca el uso de un software dinámico (Cabri-Geometry) en la representación de la situación y búsqueda de relaciones.

El problema del reparto: A dos estudiantes, Luis y Pablo, encargados de la siembra de hortalizas en las áres de cultivo de la escuela, se les asigna un pedazo de tierra en forma de un cuadrado y deciden repartirse el terreno en dos partes de tal manera que a cada uno le corresponda la misma área.

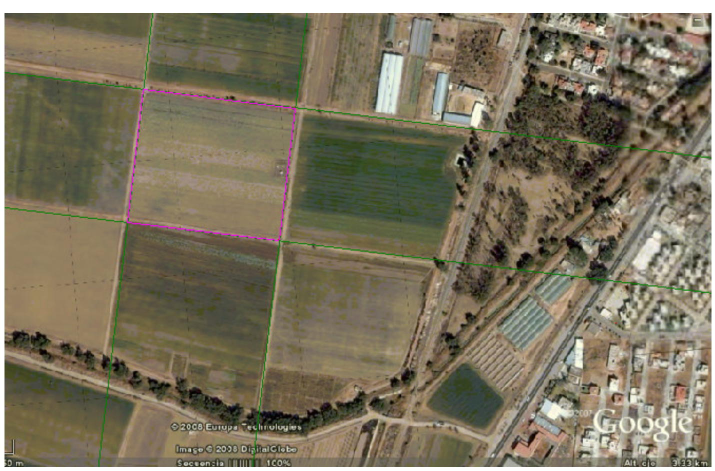


Foto del terreno escolar tomada con el software Google Earth.

Comentario: el enunciado del problema incluye una foto de los campos de cultivo. Se observa que con el software Google Earth se identifica el área real de cultivo que los estudiantes se van a repartir. Se puede determinar las dimensiones reales del área de cultivo. Además, con la ayuda de un software dinámico se puede trabajar directamente sobre la foto del terreno.

Acercamientos iniciales

Las figuras 1 y 2 representan las dos formas que inicialmente consideraron para dividir el terreno. Otro estudiante, Pedro, les sugiere seleccionar cualquier punto sobre cualquier lado del cuadrado y trazar una recta que pase por ese punto y el centro del cuadrado, Pedro les afirma que esta recta divide el cuadrado en dos regiones que tienen la misma área (Figura 3). ¿Es cierta la afirmación de Pedro? ¿Siempre funciona ese método de dividir el terreno? ¿Existe alguna relación entre el método original de Luis y Pablo con el procedimiento que propone Pedro?

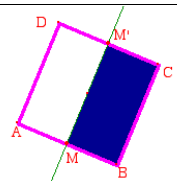
<table>
<tr>
<td>

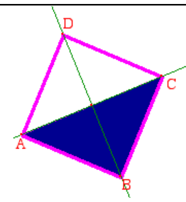
Figura 1: M & M′ son puntos medios de AB y DC.</td>
<td>

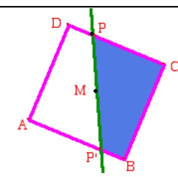
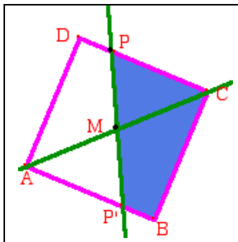
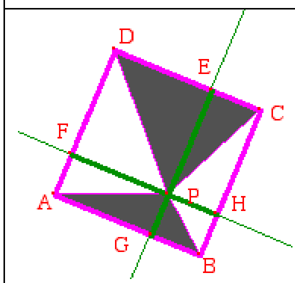
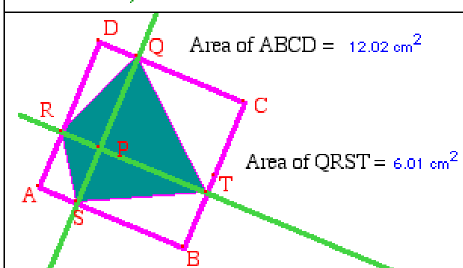
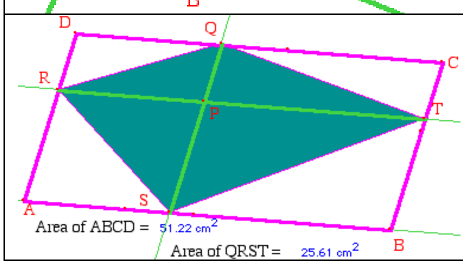
Figura 2: AC es la diagonal de ABCD</td>
<td>

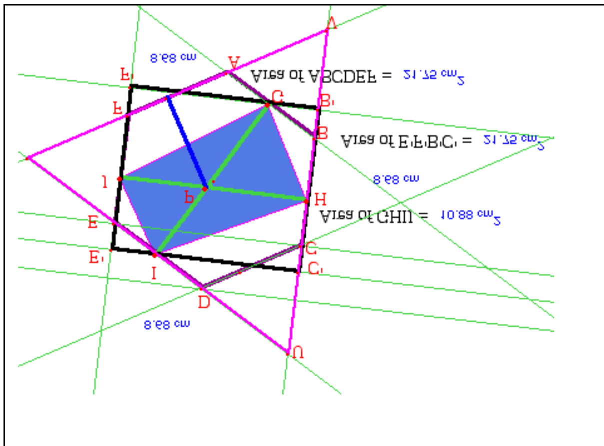
Figura 3: M es el centro del cuadrado y P & P′ están sobre el perímetro.</td>
</tr>
</table>

Durante el proceso de solución emergieron diversas maneras de cómo dividir el cuadrado en dos regiones con la misma área. El uso de la herramienta (Cabri-Geometry) ayudó a los estudiantes a examinar cada caso en forma visual numérica y a utilizar argumentos basados en propiedades geométricas. De hecho, las dinámicas de discusión propuestas por el profesor destacaron la importancia de que los estudiantes utilizaran diversos argumentos para sustentar las afirmaciones. Resultó interesante que los estudiantes utilizaron argumentos visuales, argumentos basados en el cálculo de las áreas respectivas por medio de la herramienta y aquellos argumentos sustentados en las propiedades de las figuras. Se resumen las diversas maneras que utilizaron los estudiantes para dividir el terreno y una descripción del argumento geométrico empleado para sustentar el método de división.

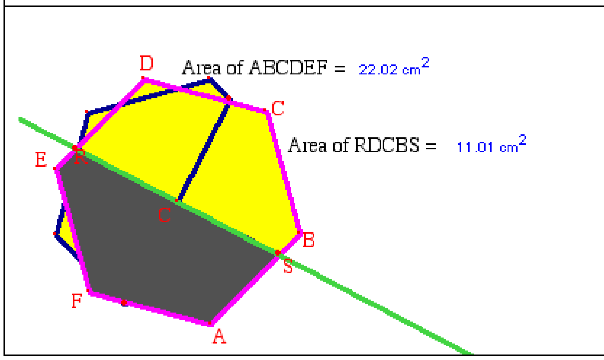
<table>
<tr><td>
</td><td>Triángulos PMC y P'MA son congruentes por LAL. Como la diagonal divide al rectángulo en dos triángulos congruentes entonces los polígonos AMPD y CMP'B tienen la misma área</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Argumentos de los rectángulos: Los rectángulos AGPF, GBHP, HCEP, y FPED se dividen en dos triángulos congruentes que permite afirmar que las áreas de las dos regiones son iguales.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Argumentos de los rectángulos</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Una generalización: El caso de paralelogramos.

Área de QRST es la mitad del área de ABCD.</td></tr>
</table>

¿Pueden los métodos de dividir al cuadrado o paralelogramo aplicarse a otras figuras? Esta pregunta planteada por el profesor guió a los estudiantes a explorar otras figuras. Por ejemplo, la justificación de que los métodos funcionaba para el hexágono involucró utilizar diversas construcciones auxiliares que se describen a continuación:

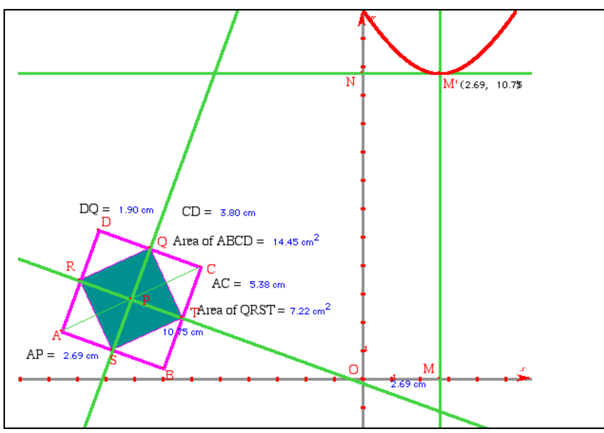


El caso del hexágono: El punto E’ es la intersección de la recta perpendicular a la recta EF que pasa por el punto I y la recta EF; el punto C’ es la intersección de esa perpendicular con la recta BC, B’ es el punto de intersección de la recta BC y la perpendicular a BC que pasa por el punto G; y el punto F’ es la intersección de esa perpendicular con la recta EF. Argumentaron que el área del rectángulo E’F’B’C’ correspondía al área del hexágono original



Hexágono y la superposición de figuras. Rotar una de las regiones (e.g. SBCDR) 180 grados alrededor del punto O (centro del hexágono), la región SBCDR coincidía con la región REFAS.

Finalmente, en el cuadrado original, los estudiantes observaron al mover el punto dentro del cuadrado el perímetro del cuadrilátero que se formaba variaba dependiendo de la posición del punto. Aquí se plantearon buscar la posición del punto interior en el cuadrado donde el perímetro del cuadrilátero fuera el mínimo. La representación gráfica de la variación del perímetro fue importante para conjeturar que cuando el punto se encuentra en el centro del cuadrado se obtiene el mínimo valor.



Un problema de variación: De todos los cuadriláteros que se forman al situar P dentro del cuadrado, ¿cuál tiene el perímetro mínimo?

Cuando P se sitúa en el centro del cuadrado, el cuadrilátero QRST alcanza el perímetro mínimo.

Se observa que un problema o tarea representa para el estudiante una oportunidad para formular conjeturas o relaciones, buscar distintos caminos de solución, establecer conexiones, generalizaciones, y sustentar y comunicar resultados.

Reflexiones finales

Resulta necesario que matemáticos, educadores y profesores trabajen conjuntamente en el diseño de planes y programas que realmente reflejen la esencia de lo que significa aprender la disciplina. En particular, lo que interesa es que los estudiantes desarrollen una forma de pensar y disposición hacia el estudio de las matemáticas donde exhiban distintas formas de representar fenómenos, identifiquen relaciones y patrones, formulen conjeturas, justifiquen y comuniquen resultados. La idea es ir más allá del empleo de exámenes estandarizados y promover formas de evaluación donde los estudiantes tengan oportunidad de mostrar distintos procesos de razonamiento, extender o buscar conexiones y eventualmente formular sus propios problemas o preguntas. En este sentido, es importante proponer un currículum en términos de secuencias de problemas donde se reflejen los aspectos inherentes que transforman las asignaturas tradicionales en líneas de pensamiento numérico, algebraico, geométrico, y estadístico. Además, los procesos de evaluación no deben separarse de las actividades de instrucción que se desarrollan en las clases; deben ser parte de las actividades cotidianas del salón de clases. El trabajo individual es solamente un aspecto a incluir en la evaluación y también resulta necesario que el estudiante valore y acepte que parte de su aprendizaje es escuchar a los demás y exponer sus propias ideas a escrutinio dentro de la comunidad del salón de clases. En este sentido, el entendimiento o comprensión de las ideas matemáticas no es un proceso final; sino dinámico que se va robusteciendo en función de la necesidad de responder y resolver series de cuestionamientos que emerjan dentro y fuera de la propia comunidad de aprendizaje. , un aspecto crucial en las agendas de resolución de problemas es la interacción y discusión abierta entre los grupos de investigación sobre los aspectos comunes y principios o fundamentos que distinguen cada uno de los programas. Esto promovería la colaboración entre los distintos grupos y evitaría la repetición o reciclaje de estudios con agendas similares.

En la resolución de problemas se reconoce también que pueden existir caminos distintos para promover el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes; sin embargo, tanto los programas de investigación como las prácticas de instrucción coinciden en reconocer la relevancia de conceptualizar la disciplina en términos de dilemas o preguntas que los estudiantes necesitan responder y discutir en términos de recursos matemáticos. En este proceso, los estudiantes desarrollan un método inquisitivo que les permite reflexionar constantemente de manera profunda sobre las diversas maneras de representar y explorar las ideas matemáticas. Es decir, los estudiantes construyen, desarrollan, refinan, o transforman sus formas de comprender y resolver problemas como resultado de formular preguntas relevantes y responderlas con el uso de distintos medios, incluyendo las herramientas computacionales. En este contexto, los acercamientos iniciales en la resolución de problemas pueden ser incoherentes o limitados, pero éstos se refinan o mejoran cuando los estudiantes presentan y discuten de manera abierta sus ideas dentro de una comunidad de aprendizaje que valora y promueve el cuestionamiento matemático o método inquisitivo.

Existe evidencia de que algunas propuestas del currículum matemático a nivel preuniversitario sugieren organizar y estructurar el contenido y las prácticas de instrucción a partir de actividades de resolución de problemas. Sin embargo, un asunto pendiente es discutir y reflexionar sobre los cambios y la forma de estructurar los contenidos bajo la perspectiva de la resolución de problemas. Además, resulta relevante establecer una agenda académica para la actualización de los profesores en servicio y la educación y formación de los nuevos profesores que resalte las actividades de aprendizaje que se deben promover en el salón de clase. Esta agenda debe incluir formas de utilizar diversas herramientas computacionales en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes (Santos-Trigo, 2007).

Se reconoce que diversas herramientas pueden ofrecer distintas oportunidades a los estudiantes para reconstruir o desarrollar conocimiento matemático. Por ejemplo, en el ejemplo desarrollado (problema del reparto), el uso del software dinámico favorece la construcción de representaciones dinámicas de los objetos matemáticos o del problema. Como consecuencia, algunas heurísticas como la medición de atributos (longitudes, áreas, perímetros), el arrastre de algunos elementos dentro de una configuración, la descripción de lugares geométricos, y el uso adecuado del sistema cartesiano resultan importantes en la búsqueda de conjeturas o relaciones y formas de justificarlas. El uso de distintas herramientas plantea la necesidad de actualizar o ajustar los marcos conceptuales que emergieron de estudios donde los estudiantes principalmente interactuaban con los problemas a partir del uso de lápiz y papel. Aquí interesa caracterizar las formas de razonamiento que los estudiantes construyen o desarrollan cuando utilizan de manera sistemática varias herramientas computacionales.

Durante el proceso de resolver la actividad o problema se observa que el profesor juega un papel importante en la orientación y desarrollo de la sesión o sesiones de trabajo. En particular, el dominio de los contenidos relevantes que aparecen en los acercamientos de solución ayuda a que el profesor oriente a los estudiantes, por medio de preguntas, a enfocar la atención no sólo a la búsqueda de conjeturas, sino también de argumentos que las sustente. El uso de las herramientas también resulta un conocimiento fundamental que el profesor utiliza para orientar a los estudiantes en la construcción de representaciones del problema. Por ejemplo, la representación dinámica del problema propicia o genera condiciones para que los estudiantes muevan objetos y busquen comportamientos regulares o invariantes. Aquí los estudiantes deben comunicar sus resultados con una notación pertinente. En relación con la importancia que juega el profesor para apoyar a los estudiantes en el proceso de resolución de problemas, éste debe mostrar competencias matemáticas que le permitan implementar acciones y estrategias que ayuden a los estudiantes a desarrollar las actividades planteadas. En esta línea, surge la siguiente pregunta:

¿Cómo adquiere el profesor los conocimientos necesarios que le permitan generar las dinámicas apropiadas para que los estudiantes desarrollen un pensamiento matemático que involucre la búsqueda constante de relaciones o conjeturas? Una posible respuesta, contempla que el profesor mismo participe en una comunidad de práctica donde se fomente una discusión abierta, basada en el método inquisitivo, no solamente de las diversas formas de abordar una actividad, incluyendo la utilización de varias herramientas, sino que también participe en la construcción de rutas de instrucción que puedan guiar las actividades en el salón de clase. Esta comunidad debe incluir a matemáticos, educadores y los mismos profesores. El marco de trabajo en esa comunidad debe promover actividades que demanden diversas maneras de razonar o pensar acerca de un problema matemático o concepto. Esta interacción (entre matemáticos, educadores y profesores) puede generar condiciones para la discusión acerca de las expectativas de estos grupos sobre el perfil y desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes. En particular, abordar de manera directa estrategias y acciones que permitan una transición planeada de los estudiantes que ingresan a sus estudios universitarios.

En esta perspectiva, resulta urgente establecer una comunicación y colaboración académica con los distintos grupos que promueven el desarrollo del conocimiento de los estudiantes en programas de investigación, propuestas curriculares y la instrucción misma.

Nota: Este trabajo es parte de un proyecto de investigación financiado por el Conacyt, referencia 47850, cuyo objetivo fundamental es analizar el uso de herramientas computacionales en la resolución de problemas matemáticos.

Referencias

Davis, B. & Simmt E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need) to know. *Educational Studies in Mathematics*, 61, pp. 293-319.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-terciary transition. Educational Studies in Mathematics, 67; 237-254.

Hiebert, J. (1999). Relationship between research and the NCTM standards. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(1), pp. 3-19.

Moreno-Armella, L. & Santos-Trigo, M. (2008). Democratic access and use of powerful mathematics in an emerging country. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education. Directions for the 21st Century, 2nd edn*, pp. 319-351.New York: Routledge.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: The Council.

Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, pp.523-536.

Santos Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII*, pp. 159-187. XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Badajoz, España

Santos-Trigo, M. & Cristóbal-Escalante, C. (2008). Emerging high school students' problem solving trajectories based on the use of dynamic software. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 27(3), pp. 325-340.

Schoenfeld, H. A. (2008). Research methods in (mathematics) education. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 467-519. NY: Routledge.

Silver, E. (1990). Contribution of research to practice: Applying findings, methods, and perspectives. In T. Cooney and C.R. Hirsch (Eds.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s. 1990 Yearbook*, pp. 1-11. Reston VA: The Council.

CONCEPCIONES ACERCA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN DOCENTES AL INICIO DE UNA MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Salvador Hernández Vaca
Centro de Ciencias de Sinaloa
salvador@correo.ccs.net.mx

La presente ponencia tiene dos componentes principales. La primera tiene como objetivo informar acerca de las características fundamentales de una maestría en educación matemática profesionalizante, centrada en la formación docente. En la segunda, al inicio de la maestría realizamos un análisis que muestra la concepción que encontramos en los profesores que son estudiantes de la maestría y, además, imparten clases de matemáticas en los distintos niveles de primaria, secundaria y bachillerato en instituciones públicas del Estado de Sinaloa, acerca del conocimiento matemático y la relación que guarda este con la enseñanza de la matemática.

Introducción

Describamos sucintamente el contexto, el presente estudio examina la concepción de los profesores acerca del conocimiento matemático y la relación que guarda este con su enseñanza. A un grupo de 116 profesores (28 profesores que imparten cursos en el nivel de bachillerato, 46 profesores que imparten cursos en el nivel de secundaria y 42 profesores que imparten cursos en el nivel primaria), se les aplicó un cuestionario con preguntas abiertas (como parte de su tarea escolar) en un diplomado con duración de 160 horas de clase, de enero a mayo del año en curso. Desde hace aproximadamente dos años, nos dimos a la tarea de reunir diferentes documentos con la finalidad de tener elementos sobre el currículum de programas de estudio a nivel postgrado en educación matemática. En relación con esto, nos hicimos dos preguntas: la primera, ¿cuáles son las instituciones que han hecho una propuesta análoga? Al contestar la pregunta, encontramos muchas instituciones educativas en nuestro país que ya han hecho trabajos similares. Ya con los documentos en mano y al analizar a fondo cada una de las propuestas de los diferentes programas, nos hicimos la siguiente pregunta ¿cuáles son los elementos académicos centrales de un programa de maestría en educación matemática? Para responder a esta última pregunta, nos dimos a la tarea de estructurar el siguiente marco teórico.

Fundamentación

Para fines prácticos, hemos creado 3 niveles (que se describen en el siguiente párrafo) para ayudarnos a interpretar los resultados. Para interpretar los niveles A y B, tomamos como elementos teóricos la literatura proporcionada por el Consejo Mexicano de Investigación Educativa (COMIE), los principios educativos del National Council of Teacher of Mathematics (NCTM, 2000), los trabajos de Elliot John (1994), Honor Williams y a la Association of Mathematics Teacher Educators (ATME). Al interpretar sus resultados, encontramos que un programa está constituido por diferentes áreas, estas no deben ser vistas como cursos equivalentes sino, más bien, como conocimientos base de los estudiantes y que se validan a través de la experiencia. Dichas experiencias deben incluir tanto cursos como seminarios, cursos intensivos, estudios independientes, tareas presenciales y a distancia. Para interpretar el nivel C, tomamos como eje rector los trabajos de: Kessel y Ma (2001), para la formación de los valores matemáticos tomamos los trabajos de Bishop (2001), para el componente etnomatemático tomamos los trabajos de D'Ambrosio (2001), Thompson (1992), Ball y Hill (2004).

Enunciamos a continuación, las características que tienen los 3 niveles:

Nivel A).- En un primer nivel, articular una buena maestría es hacer un ejercicio de sinergia, es la capacidad institucional para apoyar un programa de postgrado de calidad en la educación matemática. Teóricamente, encontramos que los programas de maestría en educación matemática pueden ofrecerse en colaboración con diferentes instituciones. La calidad se atiende creando un entorno dentro de la institución donde los estudiantes tengan la oportunidad de aprender a como trabajar e interactuar. Así, una maestría teóricamente hablando, debe conjugar los siguientes elementos:

Los elementos que constituyen el primer nivel son:

A.1.- Una masa crítica de profesores con habilidades en educación matemática quienes proveen al programa de liderazgo y conducta profesional; A.2.- La posibilidad de incluir algunos educadores matemáticos de fuera de las instituciones convocantes para potencializar la variedad y la investigación matemática; A.3.- Apoyo físico y tecnológico, por ejemplo, computadoras, librerías virtuales y salas de reunión; A.4.- Libros y revistas especializados, banco de datos, etc.; A.5.- Apoyo financiero para apoyar el programa, pago de honorarios; A.6.- Apoyar a los estudiantes para participar en congresos, foros, en la elaboración de ponencias, etc.; A.7.- Un entorno en el que se demuestre respeto por la diversidad cultural, diversidad individual, formación profesional, ética y racional.

Nivel B).- Los elementos que constituyen un segundo nivel son:

B.1.- Contenidos Matemáticos; B.2.- Investigación; B.3.- Contextos Económicos, Políticos, Históricos y Culturales de la Educación; B.4.- Aprendizaje; B.5.- Enseñanza; B.6.- Tecnología; B.7.- Currículo; B.8.- Evaluación.

Nivel C).- Los elementos que constituyen un tercer nivel son las destrezas cognitivas que un profesor debe tener para fomentar en sus alumnos.

C.1.- Seleccionar las tareas que sean de interés intelectual al estudiante; C.2.- Proveer de oportunidades para aplicar y profundizar el entendimiento matemático; C.3.- Orquestar las actividades y discurso escolar; C.4.- Ayudar a los estudiantes a emplear material didáctico físico y virtual; C.5.- Identificar y modelar estrategias en la solución de problemas; C.6.- Fomentar las competencias y el gusto por las preguntas bien planteadas y abiertas; C.7.- Fomentar el desarrollo de la expresión oral y escrita en la construcción de los argumentos matemáticos; C.8.- Desarrollar la auto-confianza y la disposición a indagar, evaluar y emplear información cuantitativa y cualitativa en la toma de decisiones por parte de los estudiantes; C.9.- Estar informado de los problemas y avances en la educación matemática, finalmente; C.10.- Estar informado a nivel nacional, estatal y local de las principales guías en educación matemática.

Desarrollo

La metodología empleada tiene como eje rector al trabajo de Zazkis y Hazzan (1999), para lo cual planteamos un cuestionario y en función de este, se realizó la entrevista a diversos profesores (Hunting, 1997) para profundizar en la concepción acerca de la matemática; la multiplicación y división de enteros; así como el estudio de las fracciones, decimales, perímetro, área, volumen, el álgebra, probabilidad, geometría y, finalmente, el cálculo. Presentamos una pequeña síntesis de los resultados que están en proceso:

Tabla.1. Resultados preliminares acerca de la visión sobre la matemática	
Visión global	Absoluta: "en la matemática solo hay dos tipos de respuestas: correctas o incorrectas", "la matemática es la ciencia perfecta", "la matemática sirve para todo"; "la matemática es exacta", "2+2=4 aquí y en China"
	Utilitarista: "es esencial para la vida cotidiana, sirve para todo", "se necesita saber matemáticas para todo lo que viene" "sirve para razonar"
	Normativa (es un juego reglado): "es el establecimiento y respeto por las reglas", "es saber jugar con reglas", "la matemática es como el béisbol, basta con saber aplicar las reglas para saber matemáticas", "saber matemáticas es tanto como saber leer y escribir"
Modelo Educativo	Preferencia por el modelo instrumental de acuerdo a Skemp R. (1976), preferencia por la regla: "el material didáctico quita mucho tiempo", " la computadora sirve para reforzar lo aprendido", "por la falta de tiempo, se aprende más rápido con las fórmulas"
	Metáfora biológica: "la matemática se aprende con mucho esfuerzo, con muchos ejercicios", "comprender la matemática es asunto de practicarlo una y otra vez hasta alcanzar los algoritmos", " es la materia más difícil", "no hay como hacer muchos ejercicios", "el cerebro debe ejercitarse como cualquier otro músculo si no, se atrofia"
	Numérico: "la matemática es números y más números", "la matemática no es para leer es para contar", "las ideas artísticas son para el literato no para el matemático"
Papel del profesor	Trasmisor: "lo primero que debe saber el profesor de matemáticas es saber mucha matemática, luego cómo enseñar"
Papel del estudiante	Agente pasivo: "el estudiante no sabe porque no le explicaron tal o cual estrategia"
Creencias	" La matemática no cambia con el tiempo", "es exacta y libre de cultura"; "es la más difícil e importante en la escuela", "sirve para razonar y organizar nuestro pensamiento"

Angustia	Preferencia por la memoria instrumental, el estudiante al tener que aprender muchas "fórmulas", se le lleva al formato enciclopédico, lo que le genera una angustia que cultiva a lo largo de su carrera.
Sobre la resolución de problemas	"la matemática sirve para resolver problemas", "la matemática es solución de problemas", la resolución de problemas requiere de mucho esfuerzo", "el éxito depende de la dificultad del problema"; "la cantidad de problemas" (si son muchos problemas son fáciles y aburridos, si son pocos son difíciles). Se requiere "suerte" para resolver problemas.
Evaluación	Para evitar la ambigüedad en la evaluación, se prefieren los exámenes escritos, por sobre los orales.
Valor matemático	Preferencia por el valor de control; Siempre prefieren los problemas que se resulten aplicando un algoritmo y por escrito, no hay problemas que se resuelven por aproximación.

En el mismo sentido, en el terreno disciplinar encontramos resultados en el campo de la aritmética, el álgebra, el cálculo, la geometría y la trigonometría, algunos de los cuales enunciamos a continuación:

En el terreno de la aritmética:

Para atender el concepto que tiene el profesor de la aritmética, hicimos uso del cuestionario y entrevista elaborado por Sowder (2005), encontramos que el profesor tiene preferencia por ajustarse cien por ciento a la regla, es decir, solucionó los problemas solamente aplicando las "fórmulas" para resolver los problemas aunque ello implicará procesos muy largos; asimismo, los profesores no mostraron proceso intuitivo alguno. La preguntas son identificadas como de "desempeño" (Zazkis y Hazzan, 1999, p. 431), por ser comunes, por ser preguntas standard que aparecen en los libros y lecciones de matemáticas, he aquí algunos ejemplos: al preguntar cuál es el resultado de efectuar las operaciones 5/0, 0/5, la respuesta fue cero, no causó problema alguno a los maestros la división entre cero, no hubo cuestionamiento alguno de tipo cognitivo.

En el terreno del álgebra

Tomamos como elemento base, los estudios de Ursini, et al. (2005), y encontramos que entre los profesores encuestados se tiene la idea de que el estudiante que sabe "simplificar expresiones algebraicas es el que sabe matemáticas", "el álgebra es la llave para entender todos los conceptos superiores de la matemática", "si sabes álgebra ya le hiciste". Si nos ajustamos a lo que entiende Ursini por variable, los profesores sólo hacen referencia al concepto único de variable vista como incógnita. Saber álgebra esta muy estereotipado, pues el que simplifica expresiones muy grandes a expresiones compactas es quien sabe álgebra. Ampliamos las expresiones aritméticas a las exponenciales al pedir que realizaran operaciones como: 5/0=, 0^0=, log 0=. Los resultados fueron que solo el 30% de los participantes contestaron correctamente la pregunta, los profesores que tienen una formación en ingeniería respondieron que las anteriores operaciones "no son correctas", "marca un error la calculadora", "descomponen la calculadora", "la solución se da en el infinito" o, finalmente, "no tienen solución".

En el terreno del cálculo

El cálculo ha quedado bajo el dominio del álgebra. Una pregunta que se formuló a los profesores de nivel bachillerato fue ¿cuál es el concepto más importe en la materia de cálculo? Dijeron que primero es la derivada y luego la integral, en este orden estricto, porque "para saber integrales es requisito saber derivadas, no hay otra forma". Lo cual es sorprendente pues, contrario a los tópicos de las publicaciones periódicas en educación matemática, encontramos en las revistas que los conceptos de función, límite, resolución de problemas en contexto, heurísticas, creencias sobre el cálculo, entre otros, son algunas categorías emergentes que más se están analizando hoy día, en revistas nacionales e internacionales, sobre la enseñanza del cálculo. Para explorar este tópico hicimos uso de los trabajos realizado por Tall y Vinner (1981), Szydlik (2000), y William (2001), como guía para el trabajo empírico y explorar el concepto de límite que posee el profesor.

En el terreno de la geometría

La geometría es otra rama de las matemáticas en las que existen problemas en relación con la enseñanza y el aprendizaje; una de las dificultades radica en que como profesores no acertamos a enseñar la geometría con base en un marco teórico que guíe nuestro quehacer académico, sólo 5 de los 116 profesores dijeron oír hablar, en los cursos de actualización del magisterio, acerca de los niveles de van Hiele. Aunque la mayoría ha tomado cursos para el manejo del geoplano (tablero geométrico), el tangram (tangrama), mosaicos (tesellations) y el recurso de la enciclomedia, no han logrado orientar el uso de estas herramientas bajo un modelo coherente que: modele, anticipe y evalué su pensamiento geométrico.

En el módulo relacionado con la geometría se abordaron investigaciones recientes sobre la naturaleza y desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes y en general, el razonamiento espacial. A continuación, analizamos algunos resultados empíricos para contrastarlos con los resultados teóricos. La idea central fue tratar el estudio del perímetro, área y volumen a la luz de los elementos teóricos que encontramos al respecto en los Hanbooks publicados por la NCTM (1992, 2007). En este sentido, a la pregunta expresa de si conocían las propuestas sobre la epistemología y enseñanza de la geometría de investigadores como Battista, Kammi, Barret, o Clemens quienes han realizado propuestas relevantes en el ámbito de la enseñanza de la geometría, sorprendentemente dijeron no saber nada de ellos, más aún, nunca habían escuchado sus nombres.

Nota.- los primeros resultados sobre el pensamiento estocástico están siendo procesados por el Dr. Santiago Inzunza.

Observaciones preliminares

En particular, encontramos múltiples representaciones que emergen de lo que parecen ser visiones tradicionales y construcciones alternativas de la matemática, la enseñanza de ésta y la perspectiva que se asume de su aprendizaje. Prevalece la visión absoluta e instrumental de la matemática. La educación matemática es un campo joven en nuestro estado, es la primera maestría que se estructura de este corte. Tampoco se tiene información de la aplicación de la matemática a contextos escolares específicos en nuestro estado. Encontramos, desde una visión intuitiva, una preocupación permanente e individual del docente (pero sin guía teórica), por apropiarse de herramienta psicológicos y/o físicas que apoyen a la comprensión de los conceptos matemáticos. Para nuestra sorpresa, fuera de los grandes investigadores como Jean Piaget y Lev S. Vygotsky, nunca habían oído nombres como: Schoenfeld, Polya, Bruner, Dienes, van Hiele, Lakatos, Fennema, Carpenter, Cobb, Artigue, Kamii, Battista, D'Ambrosio, entre muchos otros. En el mismo sentido, se les proyectó la foto de Jean Piaget y la pregunta fue, ¿quién es el señor de la foto que estamos proyectando?, hubo algunos ensayos por parte de los profesores pero, ninguno de los 116 acertó.

Nota. Los comentarios y las observaciones aquí vertidas son a titulo personal, de ninguna forma es una interpretación oficial del CONACYT ni del Consejo Estatal de Ciencia y Tecnología del Estado de Sinaloa (CECyT) y/o de cualquier otra institución que participa en el programa (Fondos Mixtos). Es sólo, una interpretación a título personal. Aunque, forma parte del apoyo financiado por el programa de la "Maestría en Docencia de las Ciencias Básicas, Opción Campo Formativo de Matemáticas".

Referencias bibliográficas

Ball, D., & Hill, H. (2004). Learning mathematics for teaching: results from California's mathematics professional developments institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35 (5), 330-351.

Bishop, A. (2001). What values do you teach when you teach mathematics?. *Teaching Children Mathematics*, 7 (6), 346-349.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (didactique des mathématiques, 1970-1990, edited and translated by Nicolas Balacheff, Martin Coper, Rosamund Sutherland and Virginia Warfield). New York: Kluwer Academic Publishers. eBook ISBN: 0-306-47211-2. Print ISBN: 0-792-34526-6. USA

D'Ambrosio, U. (2001). What is ethnomatematics, and how can it help children in school? *Teaching Children Mathematics*, 7 (6), 308, USA.

Grouws, D. A. (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, a project of the National Council of Teacher of Mathematics.

John, E. (1994). La investigación-acción en educación. Madrid, España: Ediciones Morata.

Kessel, C., & Ma, L. (2001). Mathematicians and the preparation of elementary teachers. En Derek Holton Allan (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp 467-480). New York: Kluwer Academic Publishers.

Kilpatrick J., & Swafford, J. (Eds.) (2002). Helping children learn mathematics. Washington: National Academy Press.

Lester F. K. Jr. (2007). Second handbook of research on mathematics teaching and learning, a project of the National Council of Teacher of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standars for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Robert H. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior*, 16 (2), 145-165.

Skemp, R. (1976). *Relational understanding and instrumental understanding*, Mathematics Teaching, UK.

Sowder, J.T. (2005, December). The number sense of preservice elementary school teachers. *College Student Journal*, 39, USA.

Szydlik E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (3), 258-276.

Tall D., & Vinner S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular referente to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151-169.

Thompson, A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D.A. Grouws, (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. USA: NCTM.

Ursini, S., Escareño, F., Montes D., y Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental una propuesta alternativa*. México: Trillas.

William, S. R. (2001). Predictions of the limit concept: an application of repertory grids. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32 (4), 343-367.

Williams, H. (2001). Preparation of primary and secondary mathematics teachers: A working group report, en Derek Holton Allan (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp 445-454). New York: Kluwer Academic Publishers.

Zazkis R., & Hazzan O. (1999). Interviewing in mathematics education research: choosing the questions. *Journal of mathematical Behavior*, 17 (4), 420-434.

El problema del aprendizaje de las matemáticas se ha estudiado de manera sistemática en los últimos 40 años; sin embargo, todavía hay mucho por hacer, pues su complejidad reclama la participación decidida y comprometida de: investigadores en educación matemática, matemáticos y profesores, cada uno de ellos tiene algo muy importante que aportar en el proceso de solución de la problemática del aprendizaje. En esta línea, se ha organizado el *Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas*, en el que los actores mencionados tendrán la oportunidad de intercambiar experiencias e ideas con la finalidad de ir construyendo una comunidad que promueva la discusión tendiente a encontrar propuestas de solución.