FRACCIONES PARCIALES: ELEMENTOS PARA UNA DISCUSIÓN EN EL AULA

Por

Fernando Barrera Mora
ICBI, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres
Dpto Matemática Educativa, Cinvestav-IPN México

RESUMEN

Estudios recientes sugieren que las propuestas curriculares para los diferentes niveles básicos de instrucción se elaboren tomando en cuenta una presentación estructurada ascendente de los temas a discutir. Así mismo, se enfatiza la conexión que debe existir entre los contenidos y procesos del quehacer matemático en el aula. En el curriculum vigente en el nivel medio superior, el tema de fracciones parciales se aborda sin enfatizar la conexión existente con las propiedades aritméticas de los números racionales. Estos aspectos han motivado que en el presente trabajo se discutan algunos elementos que pudiesen ser considerados al elaborar actividades de instrucción para el aula, al discutir el tema de fracciones parciales.

I. Introducción

Estudios recientes (NCTM, 2000), sugieren que las propuestas curriculares para los diferentes niveles básicos de instrucción se elaboren tomando en cuenta una presentación estructurada ascendente de los temas a discutir. Así mismo, se enfatiza la conexión que debe existir entre los contenidos y procesos del quehacer matemático en el aula. Por otro lado, se ha establecido la importancia que tiene la transferencia entre diferentes representaciones de un concepto durante el proceso de aprendizaje (Duval, 1999a, 1999b). Esto es aplicable a la representación de un problema y su inverso. Por otro lado, desde el punto de vista matemático se tiene que los problemas inversos permiten lograr una comprensión más profunda de los procesos y contenidos matemáticos involucrados en su solución[1]. Tomando esto como punto de partida, en el presente trabajo se discuten algunos aspectos que pudiesen ser considerados al elaborar actividades de instrucción en el aula cuando se abordan temas relacionados con fracciones parciales. De manera explícita, consideramos que en la discusión que se realice en el aula, al presentar el tema de fracciones parciales, los siguientes puntos permitirán una comprensión más robusta.

- Considerar la descomposición de una fracción como un proceso inverso a la suma de fracciones.
- Enfatizar la conexión que existe entre la descomposición de una fracción de números racionales y la descomposición de una función racional como suma de fracciones parciales.
- Utilizar un método para encontrar la representación de una función racional como suma de fracciones parciales en el que se minimice el uso de recursos.

[1] Dos problemas inversos de gran importancia en matemáticas que han permitido avances significativos en el área son: calcular explícitamente la inversa de una función y determinar un polinomio que tenga por grupo de Galois a un grupo finito dado. Una cosa sorprendente es que estos problemas están relacionados de manera directa.

II. Descomposición de un número racional como suma de fracciones parciales

La discusión del sistema de los números racionales en el sistema escolar, es abordada tomando algunas representaciones de estos: cociente de enteros, representación decimal y razones. En dicha discusión se hace énfasis en aspectos algorítmicos relacionados con las operaciones de suma y producto. Al respecto consideramos que la descomposición de un número racional, cuando se le representa como cociente de enteros, en suma de fracciones parciales puede ayudar a lograr un entendimiento más profundo de las operaciones con los números racionales e incursionar en aspectos aritméticos más profundos de los números enteros.

El problema de descomponer un número racional, representado como cociente de enteros, en suma de fracciones aparece por vez primera en el nivel medio (SEP, 1994). En la referencia citada se plantea el problema de expresar una fracción unitaria (una fracción con numerador igual a 1) como suma de otras fracciones unitarias; sin embargo la aparición de este problema se circunscribe a cuestiones históricas sin enfatizar suficientemente los aspectos aritméticos de esta descomposición. Consideramos que el abordar este tipo de problemas de manera sistemática puede ayudar a lograr un entendimiento más profundo del sistema de los números racionales y establecer conexiones con otros temas del currículum en el nivel medio y medio superior, por ejemplo, su relación con las funciones racionales.

Un problema que puede motivar el estudio de la descomposición de una fracción como suma de fracciones parciales es el siguiente.

Encuentre una expresión simplificada para calcular la suma

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\bullet 3}+\frac{1}{3\bullet 4}+\cdots+\frac{1}{n\bullet(n+1)}.$$

Notemos que el segundo sumando en la expresión anterior es $\frac{1}{6}$, esta situación lleva a plantear la pregunta :

¿Se puede expresar $\frac{1}{6}$ como suma (diferencia) de dos fracciones? (*proceso inverso a sumar*)

Una representación gráfica permite abordar la pregunta y "visualizar" una posible respuesta. En la figura siguiente se ha representado la unidad y varias partes de ésta.

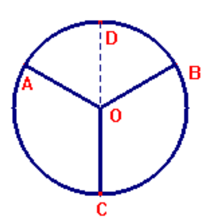

Figura 1

Primeramente, el disco unidad se ha dividido en tres partes iguales, después el ángulo AOB es bisecado por la continuación del segmento CO que determina el punto D sobre la circunferencia. Ahora, se nota que el sector DOB del disco es un sexto de éste y se tiene que el sector DOB es una sexta parte, lo que traducido a lenguaje aritmético resulta ser

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}.$$

El proceso aritmético para justificar la igualdad anterior es como sigue: notemos que $1=3-2$, entonces $\frac{1}{6}=\frac{3-2}{6}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$.

Habiendo contestado la pregunta anterior y con las ideas surgidas antes se pregunta: ¿se puede expresar $\frac{1}{3\bullet 4}$ como suma (diferencia) de fracciones?

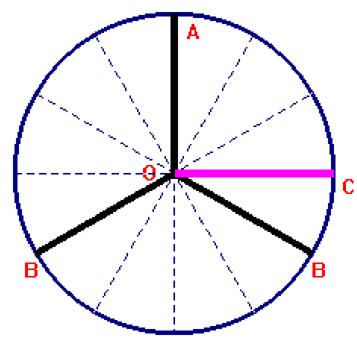

Figura 2

En la figura anterior, el sector determinado por los segmentos OA, OB y el arco AB es una tercera parte del disco, mientras que el sector determinado por los segmentos OA, OC y el arco AC es una cuarta parte. También, el disco se ha dividido en 12 partes iguales, por lo que el sector determinado por los segmentos OC, OB y el arco BC es un doceavo; de esto se tiene que $\frac{1}{12}=\frac{4-3}{12}=\frac{4}{12}-\frac{3}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$.

Las ideas anteriores ayudan a obtener la siguiente representación para cada n $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, lo cual permitirá calcular de manera explícita la suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\bullet 3}+\frac{1}{3\bullet 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$, es decir, se tiene $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\bullet 3}+\frac{1}{3\bullet 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, obteniéndose la suma deseada**.**

Otro ejemplo del mismo tipo que los anteriores es representar $\frac{5}{6}$ como suma de fracciones, lo cual se logra siguiendo ideas parecidas a las discutidas antes.

Usando una figura similar a la anterior nos permite encontrar la representación pedida; en efecto, en la siguiente figura , $\frac{5}{6}$ se obtienen del disco omitiendo el sector *DOB*; esta observación muestra que la región que representa $\frac{5}{6}$ se obtiene "sumando" dos regiones:

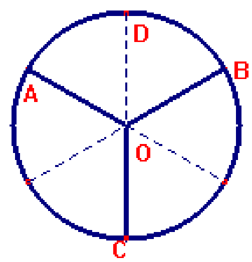

Figura 3

una está determinada por el arco que contiene a los puntos *D, A* y *C* y por el segmento *CD*; la otra está determinada por el arco *BC* y los segmentos *OB* y *OC* que es una tercera parte del disco, entonces se tiene que

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Las ideas anteriores pueden ser utilizadas para descomponer la fracción $\frac{1}{2p}$, en donde p es cualquier entero positivo mayor que uno.

Después de estos ejemplos surgen algunas preguntas: ¿Se puede descomponer una fracción del tipo $\frac{1}{pq}$, en donde p y q son dos enteros positivos, mayores que uno y primos relativos? En caso afirmativo, ¿se pueden usar ideas similares a las anteriores? Una pregunta más general es la siguiente ¿se puede descomponer una fracción propia $\frac{a}{b}$ como suma de fracciones parciales?

Estas preguntas pueden ser la plataforma para plantear algunas actividades en el aula con la finalidad de lograr un entendimiento más profundo de aspectos aritméticos del sistema de los números enteros y de los racionales, así como conexiones con representaciones gráficas y aritméticas de éstos.

III. Similitud aritmética entre los números racionales y las funciones racionales.

El estudio de las fracciones parciales tiene al menos dos vertientes: una surge de problemas que involucran a los números racionales y la otra de situaciones en donde aparecen funciones racionales.

En la sección anterior hemos presentado algunas ideas y preguntas que llevan a una discusión de aspectos aritméticos más profundos de los números racionales. Veremos en seguida que algunos de esos aspectos de los números racionales son similares a los que se tienen en el caso de las funciones racionales.

En las propuestas curriculares del nivel medio superior no aparece de manera explícita la conexión que se tiene entre las propiedades aritméticas de los números racionales y las de las funciones racionales. Consideramos que estableciendo tal conexión de manera explícita, esto pudiese ser un vehículo que facilite la comprensión del tema de fracciones parciales.

Un ejemplo que con frecuencia ocurre en el salón de clase al abordar el tema de fracciones parciales es, calcular una antiderivada de la función $\frac{1}{x(x+1)}$, es decir, encontrar una función *F(x)* cuya derivada satisfaga: $F'(x)=\frac{1}{x(x+1)}$. Sin mucha discusión se procede a plantear una descomposición de la forma $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$ y a partir de esta ecuación encontrar los valores de *a* y *b,* usando alguno de los métodos preferidos por el expositor.

Una forma alternativa pudiese ser establecer, de manera explícita, la relación que existe entre las propiedades aritméticas de los números racionales y las funciones racionales, esto pudiese ayudar a entender la razón de la descomposición en el ejemplo anterior.

Por ejemplo, tomando en cuenta la discusión de la sección anterior en la cual se abordó la descomposición de la fracción $\frac{1}{n(n+1)}$, no cuesta mucho convencerse que las ideas presentadas arriba pudiesen usarse para el caso que nos ocupa, es decir, se tiene algo como se indica enseguida.

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{(x+1)-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}.$$

Después de obtener esta descomposición de la función racional bajo estudio, se calcula la función *F(x)* buscada.

El ejemplo anterior plantea interrogantes como las siguientes. Si *f(x)* es una función racional, digamos $f(x)=\frac{1}{q(x)p(x)}$, con *p(x)* y *q(x)* primos relativos y de grado positivo ¿se puede expresar como suma de fracciones propias? Un primer intento para contestar a esta pregunta es recordar una propiedad fundamental de los polinomios con coeficientes reales:

Si los polinomios *p(x)* **y** *q(x)* **son primos relativos, entonces existen polinomios** *a(x)* **y** *b(x)* **tales que** *1=a(x)p(x)+b(x)q(x).*

A partir de esta ecuación se tiene:

$$f(x)=\frac{1}{q(x)p(x)}=\frac{a(x)p(x)+b(x)q(x)}{p(x)q(x)}=\frac{a(x)p(x)}{p(x)q(x)}+\frac{b(x)q(x)}{p(x)q(x)}=\frac{a(x)}{q(x)}+\frac{b(x)}{p(x)}.$$

Pudiese ocurrir que las fracciones de la derecha en la ecuación anterior no sean propias. Supongamos por ejemplo que *a(x)* tiene grado mayor o igual que *q(x)*, entonces existen polinomios *h(x)* y *r(x)* tales que *a(x)=h(x)q(x)+r(x)* y *r(x)* tiene grado menor que *q(x)*. Usando esta representación de *a(x)* se tiene.

$f(x)=\frac{a(x)}{q(x)}+\frac{b(x)}{p(x)}=\frac{h(x)q(x)+r(x)}{q(x)}+\frac{b(x)}{p(x)}=\frac{r(x)}{q(x)}+\frac{h(x)p(x)+b(x)}{p(x)}$, y cada una de las fracciones que aparecen en la derecha es propia, ¿porqué?

Es de notar que para obtener la descomposición anterior de *f(x),* se ha usado la propiedad fundamental *1=a(x)p(x)+b(x)q(x)* que se cumple cuando *p(x)* y *q(x)* son primos relativos. Esta propiedad tiene su análogo en el caso de los enteros.

La discusión anterior sugiere la siguiente pregunta. Supongamos que se tiene la fracción propia $\frac{f(x)}{p(x)\cdot q(x)}$, con *p(x)* y *q(x)* polinomios de grado positivo y primos relativos, ¿es posible encontrar polinomios *g(x)* y *h(x)* tales que la siguiente igualdad se cumpla?

$$\frac{f(x)}{p(x)\cdot q(x)}=\frac{g(x)}{q(x)}+\frac{h(x)}{p(x)},\ \deg\ (g(x))<\deg\,(q(x))\ \text{ y } \deg\,(h(x))<\deg\,(p(x))$$

La respuesta a esta pregunta es afirmativa y el método para encontrar a *g(x)* y *h(x)* es similar a la construcción de *a(x)* y *b(x)* que se hizo antes.

Por tanto, la descomposición de una función racional propia, como suma de fracciones parciales se reduce a factorizar el denominador como producto de polinomios primos relativos a pares y aplicar el proceso anterior, produciendo funciones racionales propias de la forma $\frac{a(x)}{p^t(x)}$, en donde *p(x)* es un polinomio irreducible. Entonces, se demuestra que la descomposición de la fracción anterior es de la forma

$$\frac{a(x)}{p^t(x)}=\frac{q_1(x)}{p(x)}+\frac{q_2(x)}{p^2(x)}+\cdots+\frac{q_t(x)}{p^t(x)},\text{con } \deg q_i(x)<\deg p(x)$$

IV. Método para encontrar la representación de una función racional como suma de fracciones parciales: Una propuesta.

De acuerdo al análisis realizado anteriormente y considerando que los únicos polinomios irreducibles en los reales son de grado uno o dos [Uspensky, 1998], se tiene que para descomponer una función racional propia como suma de fracciones parciales se reduce a considerar los siguientes casos.

I. El denominador se factoriza como producto de factores lineales diferentes.

II. El denominador se factoriza como producto de factores lineales algunos repetidos.

III. Los factores irreducibles del denominador son cuadráticos y diferentes.

IV. Hay factores cuadráticos irreducibles repetidos en el denominador.

Tomando en cuenta lo discutido hasta este punto, se tiene que una función racional se puede expresar como suma de fracciones en donde el numerador es un polinomio de grado menor que dos. Para encontrar los valores de las constantes que definen a los polinomios de los numeradores, el método más utilizado consiste en plantear y resolver un sistema de ecuaciones. En el presente trabajo mostramos un método para encontrar los valores de las constantes usando esencialmente ideas de cálculo y en el caso más complicado, resolver ecuaciones lineales en dos variables. El método que presentamos disminuye considerablemente la cantidad de cálculos que hay que efectuar para encontrar la descomposición.

NOTA: La discusión del método, así como ejemplos de su uso, será presentado en la versión en extenso del trabajo.

Referencias

Duval R (1999a). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking basic issues for learning. In Fernando Hitt and Manuel Santos (Eds), *Proceedings PME-NA* XXI, Cuernavaca, Morelos, México, Vol. 1, pp. 3-26.

Duval R (1999b). *Semiosis y Pensamiento Humano.* Vega, M (Trad). Universidad del Valle, Colombia.

Kieren, T. (1992). Rational and Fractional Numbers as Mathematical and Personal Knowledge: Implications for Curriculum and Instruction. In G. Leinhardt, R. Putnam and R. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*. Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp. 323-371

Kieren, T. (1993) Rational and Fractional Numbers: From Quotients Fields to Recursive Understanding. In T Carpenter, E. Fennema and T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research,* Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp. 49-84.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Virginia, USA: NCTM.

SEP (1994). *Libro para el Maestro, Matemáticas, Secundaria.* México.

USPENSKY, B. J. (1998). *Teoría de Ecuaciones*. Editorial Limusa. Pp. 57 – 78.