Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento

Fernando Barrera Mora y Luz Manuel Santos Trigo
CINVESTAV - IPN, México

Noviembre de 2000.

Los autores agradecen a la Sociedad Matemática Mexicana y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado durante el desarrollo de este trabajo, a través del Proyecto "Propósitos y Contenidos de la Enseñanza de la Matemática en el nivel medio superior"

Introducción

Las reformas recientes del currículo matemático a nivel preuniversitario reconocen la importancia de promover en los estudiantes el uso de varias estrategias para analizar diversas situaciones o problemas. Se afirma que en el estudio de las matemáticas es necesario atender tanto a las líneas de contenidos como a los procesos donde los estudiantes tengan oportunidades de examinar casos particulares, formular conjeturas, presentar argumentos y comunicar resultados. Durante estas actividades se destaca el uso de diversas representaciones y recursos matemáticos que les permitan identificar el comportamiento de parámetros relevantes de la situación. En particular, se enfatiza la necesidad de que el maestro diseñe actividades instruccionales donde los estudiantes tengan oportunidad de valorar la importancia de plantear preguntas, utilizar distintos recursos y estrategias que les permitan examinar cualidades matemáticas asociadas al proceso de solución. Así, las actividades en una situación se transforman en un vehículo para promover en los estudiantes la disposición hacia el estudio de la disciplina. Aquí el papel del maestro es fundamental tanto en el monitoreo del trabajo de los estudiantes como en la guía constante sobre los caminos y conexiones a explorar. ¿Qué cualidades o características son propias de una situación para que se transformen en un vehículo de aprendizaje de procesos y contenidos de las matemáticas? Un aspecto importante es que la situación o problema debe poseer una estructura que permita a los estudiantes formular preguntas, usar diversas representaciones, plantear conjeturas, utilizar argumentos y comunicar resultados. Además, una situación puede estar inmersa en múltiples contextos y ofrecer al estudiante la oportunidad de establecer conexiones entre el quehacer de la disciplina y los contextos en que se presenta. En este sentido se pueden distinguir tres tipos de escenarios con características propias de situaciones que pueden servir de marco para incentivar la participación de los estudiantes en actividades esenciales que aparecen en el quehacer de la disciplina:

Contexto puramente matemático. El referente en donde se desarrolla la situación, involucra solamente aspectos matemáticos. Un objetivo puede ser la formulación de un problema o la búsqueda de una solución a una pregunta planteada. Aquí, el principal interés, desde el punto de vista instruccional, es que los estudiantes, haciendo uso de una serie de recursos matemáticos, puedan entender la situación para poder plantear un método o camino de solución. Por ejemplo, ¿cuáles son los números primos que se pueden representar como la suma de los cuadrados de dos enteros? Un paso fundamental es identificar la información relevante y acceder a un conjunto de conceptos que permitan explorar casos particulares y eventualmente presentar un plan de solución. ¿Qué es un número primo (sus propiedades)? ¿Cómo expresar el cuadrado de un número entero?, etc. Estas podrían ser algunas preguntas iniciales que ayuden al estudiante a transformar el problema en una ecuación o tratar de construir una tabla de los primeros números primos para poder hacer un análisis de cuáles son aquellos que son suma de los cuadrados de dos enteros. Nótese que el análisis y discusión de la pregunta planteada se circunscribe al ámbito puramente matemático.

Contexto del mundo real. En esta situación, el entendimiento del problema se relaciona con la identificación de variables de la situación real que puedan ser examinadas a partir de recursos matemáticos. Por ejemplo, *el comportamiento del tráfico en la ciudad de México* es una situación en la cual hay que identificar varios parámetros relevantes (número de vehículos, horas de mayor afluencia, etc). Posteriormente, se recolecta información acerca de la interrelación de esos parámetros y eventualmente se plantea un modelo matemático que pasa a representar tal situación. El tratamiento matemático del modelo permite o ayuda a entender el comportamiento de los parámetros y en cierta medida el de la situación original. Pueden existir distintos modelos para analizar la misma situación y cada uno ofrecer ventajas o desventajas en el entendimiento o tratamiento de la situación. La modelación o matematización de problemas que derivan de situaciones del mundo real, ha sido un reto constante de la comunidad matemática que ha contribuido al desarrollo de la disciplina.

Contexto hipotético. La situación se construye a partir de una serie de suposiciones acerca del comportamiento de las variables o parámetros que explican el desarrollo de la situación. Dicho comportamiento de los parámetros no se basa en datos o información real o de laboratorio. Sin embargo, en el tratamiento matemático de la situación se puede resaltar el uso de diversas representaciones y estrategias que muestran no sólo el potencial de diversos contenidos matemáticos, sino también contrastar diversas cualidades asociadas a las diversas formas de solución. Por ejemplo, la información puede ser representada y analizada en una tabla, una lista ordenada, a partir de una gráfica o en forma algebraica. Desde el punto de vista instruccional, estas situaciones son muy adecuadas y sirven para que el estudiante pueda comparar las ventajas o desventajas que ofrecen los diferentes métodos que se utilizan al representar y resolver un problema. Un aspecto notable en el tratamiento de situaciones hipotéticas es que se pueden regular los recursos matemáticos que los estudiantes usarán para entender y participar en un proceso de solución. El NCTM (2000)[15] propone un conjunto de situaciones hipotéticas en donde el objetivo central es que los estudiantes, en el proceso de solución, empleen no solamente una serie de recursos matemáticos sino también exhiban distintas representaciones y formas de solución.

Una característica común en el tratamiento de las situaciones asociadas a distintos contextos, se manifiesta en la forma de entender la situación, plantear formas de solución y comunicar los resultados. Es decir, no importa si el contexto es puramente matemático, de la vida real o hipotético, el estudiante tiene que acceder a una serie de recursos matemáticos y estrategias que le permitan analizar sistemáticamente el comportamiento de ciertos parámetros. En los tres tipos de contextos, es importante plantear conjeturas, utilizar diferentes representaciones, plantear argumentos, comunicar e interpretar soluciones.

En el marco de referencia planteado antes, presentamos un trabajo que se desarrolla en un contexto hipotético donde se establecen una serie de condiciones iniciales que permiten examinar la situación a partir del uso de recursos matemáticos que se estudian en el nivel medio superior. La situación se transforma en un vehículo para discutir el potencial de tres formas diferentes de presentarla: el uso de una tabla o lista sistemática, la representación gráfica o visual, y la representación algebraica. Cada una de estas representaciones ofrece distintos ángulos para analizar el comportamiento de los parámetros. Por ejemplo, la representación gráfica ayuda visualmente a detectar ciertas regularidades; mientras que la algebraica puede permitir analizar el caso general y extrapolar el comportamiento que se observa en la información de la tabla y la gráfica. Las representaciones numérica y gráfica pueden ser un

15 National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)(2000). Pinciples and Standars for School Mathematics: the Council. Reston, VA.

factor importante para alcanzar una representación algebraica que permita abordar casos generales.

El trabajo que se presenta inicia mostrando una situación en la cual un médico receta medicamento (sustancia activa) a un paciente. Se desea determinar la cantidad de sustancia activa en el cuerpo del paciente en diferentes momentos después de haber iniciado el tratamiento; después se formulan y discuten algunas preguntas con la finalidad de orientar la discusión en la situación planteada. Durante la discusión se describen algunas fases importantes que se deben seguir en el proceso de solución de un problema, entre las cuales se destacan:

- entendimiento de la situación o problema
- análisis de la información o datos
- solución de casos particulares
- planteamiento y solución de casos generales
- análisis retrospectivo del proceso de solución.

En la última parte se presenta una *guía de aplicación* que auxilia al maestro en la puesta en práctica con los alumnos, de las actividades que se han desarrollado a lo largo de la discusión del trabajo.

1. Planeación de la actividad

Descripción. Los estudiantes reciben información sobre las características particulares de un tratamiento médico bajo el suministro de medicamento. A partir de esto, deben obtener información que les permita determinar la cantidad de medicamento en diferentes momentos. En este proceso los estudiantes necesitan examinar la información desde diferentes perspectivas.

Antecedentes. Los estudiantes deben disponer de diferentes representaciones de los números racionales (decimal, cociente de enteros); funciones (lineales); pendientes de rectas; representación de datos (gráfica, tabular y algebraica).

Contenidos matemáticos importantes en el proceso de solución. Los contenidos matemáticos requeridos en el proceso de solución, incluyen funciones, relaciones recursivas, pendientes de rectas, números racionales (operaciones) y su representación decimal, proporcionalidad, razón de cambio, procesos de aproximación (límites), progresiones geométricas, escalas y medidas.

Procesos matemáticos. Se debe tener en cuenta el uso de tablas (tratamiento numérico de la información), la representación gráfica o visual de la información, la representación algebraica, el análisis de casos particulares, la búsqueda de patrones y generalizaciones, la visión retrospectiva del proceso de solución, la comunicación oral y escrita de resultados.

Condiciones de aplicación. La actividad se puede realizar individualmente o por equipo (3 a 5 estudiantes) que podrán usar calculadoras o algún programa computacional. El tiempo estimado de la actividad es de tres horas en total, dividido en dos sesiones de hora y media.

2. El problema

> *Cuando un paciente recibe un tratamiento médico bajo el suministro de medicamento, se observa que si la*

dosis es pequeña, es posible que éste no produzca ningún efecto positivo en el paciente. Por otro lado, si al paciente se le suministra una dosis muy grande, los efectos colaterales del medicamento pueden ser peligrosos. Además, para que el medicamento logre el efecto deseado, es importante que cierta cantidad de sustancia activa permanezca en el organismo del paciente durante determinado tiempo.

A continuación se describe la forma en que el organismo de un paciente recibe y asimila medicamento durante un tratamiento médico hipotético.

Descripción del suministro. Un médico examina a un paciente y le receta un tipo de medicamento que le ayude a combatir cierta enfermedad. Por cada suministro, la dosis de sustancia activa del medicamento que le receta es de 16 unidades. El médico le da la siguiente descripción del suministro a su ayudante de laboratorio, con la finalidad de hacer un estudio posterior.

i. Dosis por cada suministro: 16 unidades.

ii. Cuando el paciente recibe un suministro de medicamento, su organismo inicia inmediatamente un proceso para asimilar las 16 unidades, y este proceso termina a los 10 minutos de iniciado. Así, diez minutos después del primer suministro, el cuerpo del paciente habrá asimilado la cantidad total de sustancia activa que le fue suministrada.

iii. En el momento en que el organismo del paciente asimila el total de la sustancia activa que le fue suministrada, se inicia un proceso de eliminación del medicamento.

iv. Cuando la cantidad máxima de medicamento previa a un suministro se ha *reducido a la mitad*, tiene lugar el siguiente, iniciándose un aumento en la cantidad de sustancia activa en el organismo del paciente. Para el medicamento que se está suministrando, el médico indica que esa reducción se logra *cada 4 horas* a partir del suministro. Por ejemplo, el segundo suministro se realizará cuando la cantidad de sustancia activa sea de 8 unidades, lo cual ocurrirá cuando hayan transcurrido cuatro horas después del primer suministro.

v. El paciente recibirá varios suministros durante el tratamiento.

¿Cómo analizar la evolución de la cantidad de medicamento en el cuerpo del paciente a partir del uso de ideas o recursos matemáticos? ¿Qué datos o información pueden ser importantes en el análisis? El ayudante de laboratorio se plantea la tarea de *cuantificar la cantidad de sustancia activa que permanecerá en el cuerpo del paciente en diferentes momentos.*

Una posible forma de abordar la tarea planteada, es formulando algunas preguntas que se relacionen directamente con la tarea a realizar.

- ¿Qué cantidad de medicamento acumula el organismo en cada suministro?
- ¿Qué cantidad de medicamento se acumula en el organismo 10 minutos después de cada suministro?

Antes de intentar dar respuesta a las preguntas planteadas, es conveniente hacer algunos señalamientos sobre la importancia de documentar y describir el proceso de solución de un problema que involucra el uso de diversos recursos y procesos matemáticos.

3. Análisis y discusión de fases importantes durante el proceso de solución

En el proceso de resolver un problema, siempre es posible distinguir fases o etapas que explican las acciones que el sujeto realiza durante la búsqueda e implantación de posibles caminos de solución. Por ejemplo, una primera etapa se vincula con la importancia de entender la situación o problema; específicamente interesa identificar la *información relevante* que ayude a proponer caminos o formas de solución. Otro aspecto, es *el diseño e implantación de una o varias formas de solución*. En particular, en esta fase se destaca el uso de diferentes estrategias como: *el uso de tablas, el análisis de casos particulares, la búsqueda de patrones, o el análisis sistemático de la información* a partir de diversas representaciones (gráficas o algebraicas). Otra etapa esencial, es la *revisión y análisis global del proceso de solución* y la búsqueda de otras *conexiones con la situación original.*

Las dos preguntas planteadas inicialmente sirven de referencia para señalar y discutir las fases importantes del proceso de solución. En particular, se identifica el potencial de un conjunto de estrategias que aparecen vinculadas a las distintas fases del proceso. Además se sugiere un conjunto de actividades que los estudiantes pueden realizar durante su interacción con la situación.

Entendimiento de la situación o problema. Conviene explicar en forma verbal y escrita, usando sus propias palabras, la información que aparece en el enunciado de la descripción del suministro, en términos de lo que le ocurre a la cantidad de sustancia activa durante un periodo determinado. En esta fase se destaca la identificación de datos y momentos importantes durante el tratamiento. Algunos datos que parecen ser relevantes en el entendimiento de la situación que se está analizando, se enumeran a continuación:

- la dosificación es de 16 unidades en cada suministro
- el tiempo de asimilación de la dosis es de 10 minutos
- el periodo de suministros es de 4 horas
- la cantidad de sustancia activa que se elimina entre un valor máximo y un mínimo es la mitad del valor máximo.

Análisis sistemático de la información mediante diversas representaciones. Existen diferentes maneras de analizar los datos o información relevantes que se incluyen en una situación o problema. Por ejemplo, el *uso de una tabla* puede ayudar a determinar el comportamiento de ciertas relaciones entre los datos a partir de un análisis cuantitativo. Una *representación gráfica* puede ayudar a efectuar un análisis visual del comportamiento de los parámetros importantes de la situación o problema. De la misma manera, una *representación algebraica* puede ser de utilidad para expresar en forma general y concisa la relación existente entre datos e incógnitas.

En la situación que se está abordando, se ilustra el uso de estos tipos de representaciones y sus conexiones para contestar y extender las dos preguntas planteadas inicialmente.

(i) Uso de una tabla. Cuando se analizan datos numéricos, un recurso de utilidad es el uso de tablas en donde se muestren aspectos relevantes de la información.

¿Qué datos deben aparecer en una tabla para hacer un análisis eficiente de la información? La respuesta a esta pregunta dependerá de las condiciones del problema o situación. En nuestro caso, dado que hay varios momentos importantes y la información en cada uno de ellos está relacionada estrechamente, se ha elegido la siguiente tabla; sin embargo, existen otras posibilidades para presentar tal información. ¿Cuáles propondría?

Para determinar las entradas de la tabla usaremos las *reglas de asignación* que determinan la cantidad de sustancia en diferentes momentos. Por ejemplo, la *cantidad de sustancia en el organismo al momento del suministro es la mitad de la cantidad máxima antes de éste*. ¿Cuál es la *regla* que determina la cantidad de sustancia en el organismo 10 minutos después del suministro?

De la tabla 1 se observa la dependencia que hay entre el número de suministros y el número de horas transcurridas, más aún, uno determina al otro y recíprocamente. ¿Cuál es la relación de dependencia?

¿Cuántas horas han transcurrido en el momento del *n*-ésimo suministro?

Describa cómo cambia la cantidad de sustancia activa en el organismo del paciente a partir del análisis de la información incluida en la tabla anterior. ¿Qué se observa respecto a la cantidad de sustancia activa en el cuerpo del paciente conforme recibe suministros de medicamento?

Tabla 1

Suministro No. (cada 4 horas)	Horas transcurridas al momento del suministro	Cantidad de sustancia activa en el organismo en el momento de cada suministro	Cantidad de sustancia activa en el organismo, 10 min. después de cada suministro
1	0	0	16
2	4	8	24
3	8	12	28
4	12	14	30
5	16	15	31
6	20	15.5	31.5
7	24	15.75	31.75
8	28	15.875	31.875
9	32	15.9375	31.9375
10	36	15.96875	31.96875

La información contenida en la tabla ilustra algunos aspectos de cómo varía la cantidad de sustancia activa en el organismo después de que el paciente ha recibido cierto número de suministros. De hecho, nos permite observar una *tendencia* de la cantidad de medicamento en el paciente. Esta *tendencia* puede ser más reveladora, si representamos los datos de la tabla mediante el uso de una gráfica en donde se muestre la cantidad de sustancia al *incrementar* el número de horas, y por lo tanto, el número de suministros.

Entre otras cosas, el uso de una tabla nos permite construir, a partir de la información contenida en ésta, una gráfica que ilustre de manera visual el comportamiento de las cantidades bajo estudio.

(ii) Representación gráfica. Con los datos de la tabla, construya una representación gráfica donde se exhiba el número de horas transcurridas y la correspondiente cantidad de sustancia activa acumulada en el cuerpo del paciente (figura 1).

Describa lo que se observa en la gráfica, en términos del seguimiento del tratamiento. ¿Qué diferencias de la información resaltan entre las representaciones tabular y gráfica?

(iii) Análisis algebraico de la información. En algunos casos, la información que se obtiene de una tabla o gráfica, puede ser suficiente para responder y analizar preguntas importantes de la situación o problema. Sin embargo, es común que los datos de una tabla o la información gráfica, sean el vehículo para introducir en el análisis otros métodos, como el *algebraico*. Por ejemplo, en la tabla y gráfica construidas anteriormente, se han observado ciertas *regularidades* en la forma en que cambia la cantidad de sustancia activa en el organismo del paciente. ¿Cómo describir las regularidades en forma algebraica? Regresemos a la tabla 1 y procedamos a efectuar un análisis de cómo se calculó la cantidad de sustancia en *forma racional*, es decir, como *cociente de enteros.* Esto se ilustra en la tabla 2, la cual se construye con la regla: en el sumi-

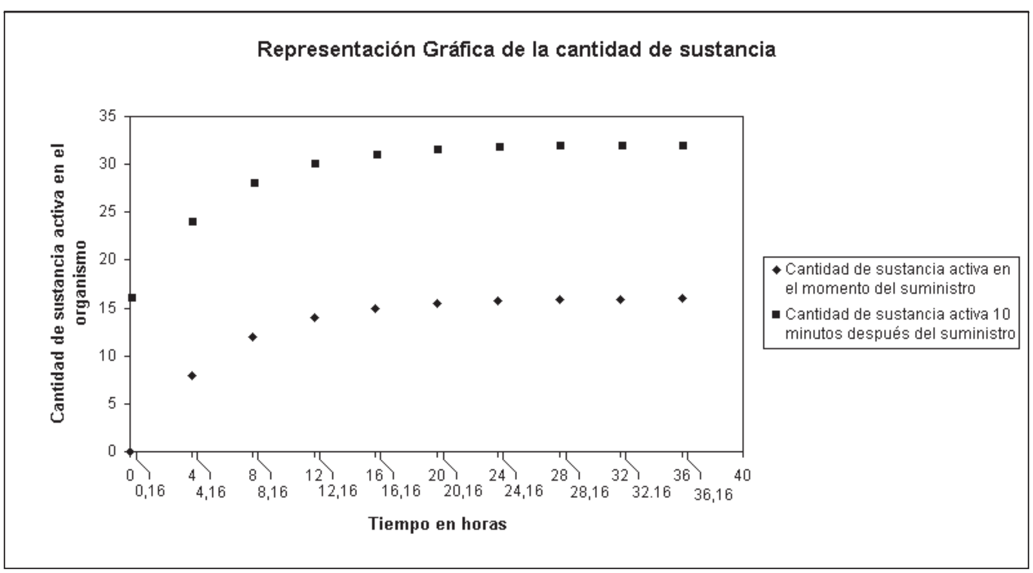

Figura 1

nistro número $n \geq 2$, la cantidad de sustancia es la que había en el suministro número $n - 1$, *más 16, todo dividido entre dos*.

Hagamos algunas observaciones sobre las regularidades de los datos de la tabla. Primeramente, en la tabla 1 notamos que la *cantidad de sustancia* en el organismo, muestra un patrón de comportamiento al aumentar el *número de suministros*. Este patrón lo identificamos como sigue. Notemos que el numerador de la expresión que indica la cantidad de sustancia activa, contiene sumas de la forma

$$16 + 2 \cdot 16 + 2^2 \cdot 16 + \cdots + 2^k \cdot 16,$$

en donde k es un entero positivo. Más precisamente, si C_n denota la cantidad de sustancia activa en el organismo del paciente en el momento del n-ésimo suministro, de la tabla 1 se obtienen las siguientes regularidades:

– aparece 16 como factor en C_n

– cada sumando en el numerador contiene potencias de 2, cuyos exponentes crecen de cero a $n - 2$

– el denominador es 2^{n-1}.

Traduciendo lo anterior a lenguaje algebraico se concluye que:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{16 + 2 \cdot 16 + 2^2 \cdot 16 + \cdots + 2^{n-2} \cdot 16}{2^{n-1}} \\ &= 16\left(\frac{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}}{2^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

Tabla 2

Suministro Número	Cantidad de sustancia activa en el organismo al momento de cada suministro
1	0
2	$\frac{0+16}{2} = \frac{16}{2}$
3	$\frac{\frac{16}{2}+16}{2} = \frac{16+2\cdot 16}{2^2}$
4	$\frac{\frac{16+2\cdot 16}{2^2}+16}{2} = \frac{16+2\cdot 16+2^2\cdot 16}{2^3}$
5	$\frac{\frac{16+2\cdot 16+2^2\cdot 16}{2^3}+16}{2} = \frac{16+2\cdot 16+2^2\cdot 16+2^3\cdot 16}{2^4}$
6	$\frac{\frac{16+2\cdot 16+2^2\cdot 16+2^3\cdot 16}{2^4}+16}{2} = \frac{16+2\cdot 16+2^2\cdot 16+2^3\cdot 16+2^4\cdot 16}{2^5}$

Note que el referente fundamental para describir el patrón, es el número de suministros: 1, 2,..., n.

La expresión que se tiene para C_n sugiere la pregunta: ¿cómo representar la suma $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}$ en forma "cerrada" (fórmula)? Las condiciones del problema imponen la condición $2 \leq n$, (n es el número de suministros), pues para $n = 1$, la cantidad de sustancia se obtiene directamente de los datos. Denotemos por S_{n-2} a la suma anterior y observemos las siguientes características interesantes que relacionan a S_{n-2} y S_{n-1}:

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} \\ &= S_{n-2} + 2^{n-1} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= 1 + 2\,(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}) \\ &= 1 + 2S_{n-2}. \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$S_{n-2} = 2^{n-1} - 1,$$

Lo que a la vez nos permite escribir a C_n en la siguiente forma

$$\begin{aligned} C_n &= 16\left(\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{16}{2^{n-1}}(2^{n-1}-1) \\ &= 16\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

Cambiando 2 por r en la discusión previa, encuentre una expresión para la suma , con n un entero positivo. El caso $r = 1$ debe tratarse aparte.

Se observa que diez minutos después del n-ésimo suministro, el cuerpo del paciente habrá acumulado la cantidad que tenía en ese momento, más la que acaba de ser asimilada (16 unidades). Si esta cantidad la denotamos por A_n se tendrá:

$$A_n = C_n + 16 = 16\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) + 16 = 16\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

En una parte el proceso de determinación de las fórmulas para A_n y C_n, el estudiante se puede ayudar con una calculadora simbólica, como la TI92. Con este tipo de calculadora se puede proceder de la siguiente manera. Tomando como referencia a la ecuación

$$C_n = 16\,\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}}{2^{n-1}},$$

la tarea inicial sería: ¿cómo introducir esta información en la calculadora de tal manera que se pueda generar la fórmula correspondiente? Una posible forma es la siguiente. Escriba la ecuación anterior en forma de sumatoria haciendo uso de las facilidades que proporciona la calculadora, es decir, usando los comandos correspondientes, escriba la expresión $\left(\frac{16}{2^{n-1}}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-2} 2^k\right)$. Una vez hecho esto, se puede invocar el comando `factor` con lo que se obtiene:

$$\left(\frac{16}{2^{n-1}}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-2} 2^k\right) = 16(2^n - 2)2^{-n},$$

lo que se puede escribir como $16(1-\frac{1}{2^{n-1}})$, que corresponde exactamente a la fórmula obtenida antes.

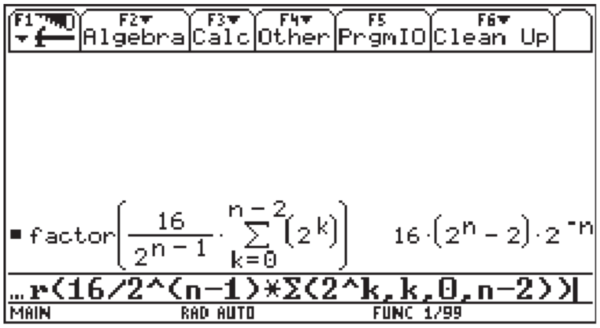

Figura 2
Uso de la calculadora para determinar c_n

Un procedimiento análogo se puede seguir para obtener A_n, esto se ilustra en seguida. Proceda como antes, es decir, utilice el comando `factor` a la expresión: $(16/2^{n-1})\left(\sum_{k=0}^{n-2} 2^k\right)+16$, lo que producirá $32(2^n - 1)2^{-n}$ (figura 3). Como antes, este resultado se puede escribir en la forma $16\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ que corresponde al resultado que se obtuvo para A_n.

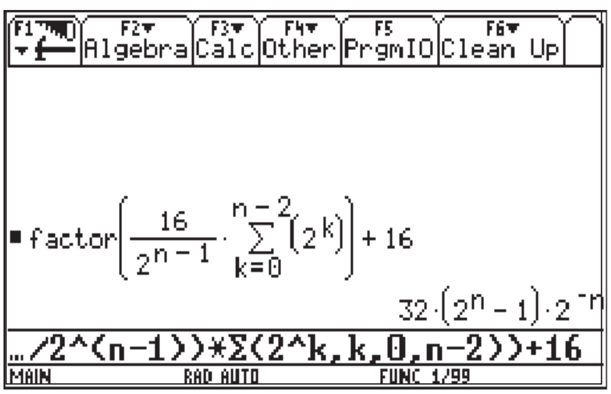

Figura 3
Uso de la calculadora para determinar A_n

El uso de la calculadora simbólica se puede extender para abordar problemas más generales. Arriba se solicita que al cambiar 2 por r se obtenga una expresión que represente a la suma $1 + r + r^2 + \cdots + r^n$, n entero positivo y $r \neq 1$. Para obtener el resultado aplique el comando `factor` a la expresión: $\sum_{k=0}^{n} r^k$ y obtendrá como resultado: $(r^{n+1} - 1)/(r - 1)$ (figura 4).

En los casos tratados antes, la calculadora se puede emplear como un medio que verifique las fórmulas obtenidas por procedimientos algebraicos.

Se observa que el empleo de esta herramienta puede ser de utilidad para que el estudiante conjeture fórmulas o expresiones generales en forma directa.

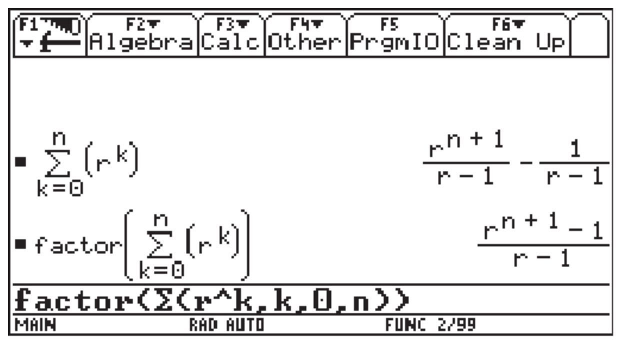

Figura 4
Determinación de $1 + r + r^2 + \ldots + r^n$

A partir de las expresiones anteriores para A_n y C_n, se pueden verificar los valores en las tablas anteriores como un medio para comprobar que los cálculos efectuados para obtener A_n y C_n son correctos. En la tabla 3 aparecen los valores con expresiones decimales. Verifique estos resultados usando las fórmulas anteriores (use su calculadora). La prueba formal que garantiza la validez de las fórmulas anteriores se puede dar por inducción matemática[16] sobre n.

---

16 Para una revisión del enunciado y uso del *principio de inducción matemática*, se recomienda consultar el fascículo: “El Método de la Inducción Matemática”, I.S. Sominskii, Editorial LIMUSA-WILLEY, S.A. (1972).

Tabla 3

Suministro No. (cada 4 horas)	Horas transcurridas al momento del suministro	C_n	A_n
1	0	0	16
2	4	8	24
3	8	12	28
4	12	14	30
5	16	15	31
6	20	15.5	31.5
7	24	15.75	31.75
8	28	15.875	31.875
9	32	15.9375	31.9375
10	36	15.96875	31.96875

Los resultados anteriores se han obtenido suponiendo que los suministros son dados cada 4 horas. ¿En qué forma cambian éstos, si los suministros se dan cada 8 horas? ¿En qué forma, si los suministros son dados cada 12 horas?

(iv) Variación continua de cantidades. Cuando se abordan problemas que involucran a diferentes tipos de números, por ejemplo: enteros, racionales y reales, una primera aproximación en la búsqueda de soluciones es considerar números enteros, y a partir de los resultados obtenidos para este caso, continuar con un análisis que incluya a los números reales para tener una visión más completa del problema. Por ejemplo, en la discusión que se ha hecho antes respecto a la cantidad de sustancia activa en el cuerpo del paciente, se ha tomado como referente el número de suministros, el cual es un entero. Sin embargo, el número de suministros está determinado por el tiempo transcurrido a partir del momento en que se inicia el tratamiento. Por esto, bajo *hipótesis adicionales* sobre el suministro, se puede hacer una análisis de la cantidad de sustancia en el organismo para cada tiempo t. Para ilustrar estas ideas, haremos la siguiente suposición. Una posibilidad, la cual simplifica el análisis significativamente, es que la *rapidez de asimilación sea constante*. De la misma manera, supongamos que el organismo elimina a una rapidez constante. Con estas suposiciones se pueden plantear las siguientes preguntas.

¿Cuál es la razón de cambio entre valores máximos y mínimos al considerar dos suministros consecutivos?

¿Cómo determinar la cantidad de sustancia activa en cada instante después de iniciado el tratamiento?

Con las condiciones que se han establecido, se puede obtener una expresión que determine la cantidad de sustancia activa en cada instante. Para esto procederemos de la siguiente forma.

La hipótesis sobre la forma en que asimila la sustancia el organismo, equivale a decir que la cantidad de sustancia entre un valor máximo y un mínimo *varía linealmente* respecto al tiempo, entonces, para determinar la cantidad de sustancia en cada momento, es suficiente (¿por qué?) encontrar las pendientes de los segmentos que unen los puntos (n, C_n) y ($n + 1/24, C_n + 16$); ($n + 1/24, C_n + 16$) y ($n + 1, C_{n+1}$) (figura 5).

Aquí se ha tomado como unidad de medida el tiempo que transcurre entre dos suministros consecutivos, entonces 10 minutos es 1/24 de esta unidad (¿por qué?).

Notemos que la rapidez de eliminación es precisamente la pendiente del segmento definido por los puntos ($n + 1/24, C_n + 16$) y ($n + 1, C_{n+1}$). Si ésta es denotada por E_n, entonces se tiene:

$$E_n = \frac{C_{n+1} - C_n - 16}{n + 1 - n - \frac{1}{24}} = \frac{24}{23}\left\{16\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - 16\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - 16\right\}$$

$$= \frac{384}{23}\left\{\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} - 1\right\}$$

$$= \frac{384}{23}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right) \quad \text{(¿por qué?)}$$

Para analizar el proceso de asimilación, bajo la hipótesis de su rapidez constante, debemos tomar un valor mínimo, (C_n) y el inmediato valor máximo, ($A_n = C_n + 16$). Si la rapidez de asimilación es denotada por D_n, se tiene:

$$D_n = \frac{C_n + 16 - C_n}{n + 1/24 - n} = \frac{16}{1/24} = 384.$$

¿Cuál es el significado del valor $D_n = 384$ en términos de la cantidad de sustancia asimi-

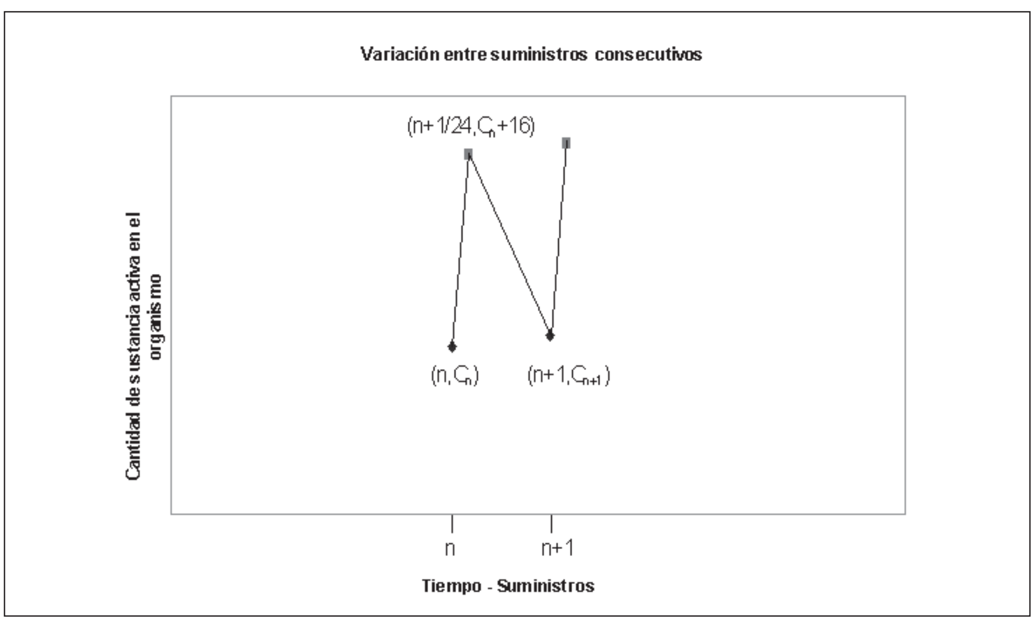

Figura 5

lada por unidad de tiempo? ¿Está de acuerdo este resultado con los datos iniciales?

La figura 6 ilustra la cantidad de sustancia en cada instante partiendo de los supuestos anteriores, (rapidez de asimilación y eliminación constante). Esta gráfica puede ser útil para responder las preguntas que se plantean. ¿Puede obtener una *función* que describa la cantidad de sustancia en el organismo del paciente en cada instante? ¿Cuáles son los significados de las expresiones para E_n y D_n en términos de la *variación* de sustancia activa en el organismo del paciente? Explique.

En el suministro de algún medicamento, se espera que el organismo mantenga una cantidad mínima, para que surta efecto, y una máxima para evitar sobredosis. Identifique en la gráfica anterior, a partir de qué suministro se consideran *estabilizadas* tanto la cantidad máxima como mínima. ¿Cuáles son esos valores? Explique.

El proceso de absorción y eliminación de sustancias médicas depende del organismo de cada persona. En la situación que se ha estado discutiendo, diremos que el paciente tiene un *factor de eliminación* de 1/2, lo cual significa que al momento de un suministro, el organismo ha *eliminado la mitad* de la cantidad máxima que alcanzó 10 minutos después del suministro previo. ¿Cuál es el comportamiento de las cantidades en un proceso similar al anterior para un paciente que tiene un factor de eliminación de 1/3? ¿Cuál es para un paciente que tiene un factor de eliminación 1/4?

Llamemos *período de absorción* al tiempo que tarda el cuerpo del paciente en asimilar la totalidad del medicamento después de haberlo recibido. Por ejemplo, en el

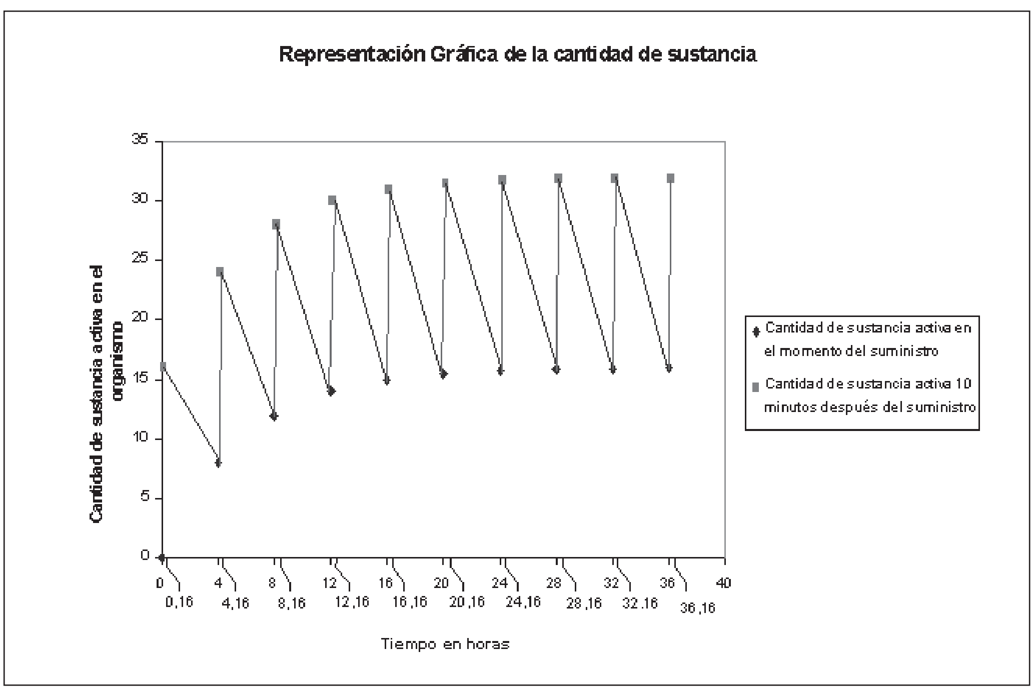

Figura 6

caso discutido antes, el período de absorción es 10 minutos. Si $t \neq 10$ minutos es un tiempo fijo mayor que cero y menor que 4 horas, ¿Cambian todos los resultados anteriores?

Tratamiento del caso general. En general, al poner en práctica un tratamiento bajo el suministro de medicamento, se deben considerar ciertas características físicas del paciente (edad, peso, etc.), las cuales ayudarán a determinar la dosis correspondiente.

Supongamos que se desea hacer un estudio en el cual se tratarán pacientes suministrándoles un medicamento que exhibe un patrón similar al discutido antes. Lo que se debe tener como datos son:

- la cantidad d de sustancia a ser suministrada cada vez
- el factor r de eliminación
- el período t de absorción
- el tiempo s entre cada suministro.

En el tratamiento discutido antes, $d = 16$ unidades, $r = 1/2$, $t = 10$ minutos y $s = 4$ hrs. Si en cada suministro el paciente recibe d unidades, el factor de eliminación es r, el tiempo de absorción es t, y el cuadro de comportamiento es como el que ha sido discutido antes, entonces al término de t unidades de tiempo, por ejemplo minutos, después del primer suministro, el paciente registra en su organismo d unidades, de las cuales, al momento del segundo suministro, tendrá $d - rd$, cantidad igual a la que tenía, menos la que eliminó. Al término de t minutos después del segundo suministro, tendrá $d - rd + d = d(2 - r)$ unidades. El análisis para suministros sucesivos lo podemos ilustrar de la siguiente forma. Si C_n denota la cantidad de sustancia activa en el cuerpo del paciente al momento del n-ésimo suministro ($n \geq 2$), t minutos después, la cantidad se habrá incrementado a $C_n + d$. Denotemos esta nueva cantidad por A_n. Entonces la relación entre C_n y A_{n-1}, de acuerdo a las condiciones del suministro, es: C_n es igual a A_{n-1}, menos la cantidad que fue eliminada, la cual es rA_{n-1}, en forma algebraica,

$$C_n = A_{n-1} - rA_{n-1} = A_{n-1}(1 - r)$$

También se tiene que A_{n-1} es la cantidad que había al momento del (n – 1)-ésimo suministro más d, es decir, sustituyendo la última ecuación en la penúltima, agrupando y factorizando se tiene:

$$C_n = (C_{n-1} + d)(1 - r),$$

es decir, podemos obtener C_n conociendo C_{n-1}. ¿Cuál es la relación que hay entre A_n y A_{n-1}? Con las expresiones anteriores para C_n, podemos obtener algunas de las entradas de la siguiente tabla, ¿Cómo llenar las restantes? En lo que sigue, n denota el número de suministro.

En la tabla 4 se observa un patrón de comportamiento en la expresión que determina a C_n. Al momento del suministro n-ésimo, C_n está expresada como suma de potencias de $1 - r$, corriendo los exponentes desde 1 hasta $n - 1$ y d aparece como factor común. Esto se puede representar en forma algebraica como se indica abajo.

$$C_n = d[(1 - r) + (1 - r)^2 + (1 - r)^3 + \cdots + (1 - r)^{n-1}]$$

Podemos utilizar la ecuación anterior para obtener una expresión para A_n, recordando que $A_n = C_n + d$, de lo que se tiene:

$$\begin{aligned} A_n &= C_n + d \\ &= d[(1 - r) + (1 - r)^2 + (1 - r)^3 \\ &\quad + \cdots + (1 - r)^{n-1}] + d \end{aligned}$$

Tabla 4

N	C_n	A_n
1	0	d
2	$d(1 - r)$	?
3	$[d(1 - r) + d][1 - r]$ $= d[(1 - r)^2 + (1 - r)]$	?
4	$\{d[(1 - r)^2 + (1 - r)] + d\}\{1 - r\}$ $= d[(1 - r)^3 + (1 - r)^2 + (1 - r)]$	?
5	$\{d[(1 - r)^3 + (1 - r)^2 + (1 - r)] + d\}\{1 - r\}$ $= d[(1 - r)^4 + (1 - r)^3 + (1 - r)^2 + (1 - r)]$	?

$$= d[1 + (1 - r) + (1 - r)^2 + (1 - r)^3 + \cdots + (1 - r)^{n-1}]$$

Se observa que la expresión que representa a C_n contiene sumas de la forma $B + B^2 + \cdots + B^k$, la cual al sumarle uno, es similar a las consideradas antes, para el caso $B = 2$. Denotemos por S_k a la suma $1 + B + B^2 + \cdots + B^k$. La relación entre S_k y S_{k-1} es similar al caso $B = 2$, tratado antes, es decir,

$$\begin{aligned} S_k &= 1 + B + B^2 + \ldots + B^k \\ &= 1 + BS_{k-1} \\ &= S_{k-1} + B^k \end{aligned}$$

De esto obtenemos: $(B - 1)S_{k-1} = B^{k-1}$. Si $B = 1$, la suma que define a S_{k-1} contiene k sumandos todos iguales a 1, por lo que $S_{k-1} = k$. En cualquier otro caso se tiene,

$$S_{k-1} = \frac{B^k - 1}{B - 1}.$$

Con este resultado obtenga una fórmula para la suma $B + B^2 + \cdots + B^k$ y verifique que las expresiones que determinan a C_n y A_n están dadas por:

$$C_n = d\left[\frac{1 - r - (1 - r)^n}{r}\right],$$

$$A_n = d\left[\frac{1 - (1 - r)^n}{r}\right],$$

cuando $r \neq 0$.

Es interesante notar que el uso de una calculadora simbólica puede ser de gran utilidad, aún en el caso en que se aborden problemas completamente algebraicos. Por ejemplo, usando la calculadora TI-92, podemos obtener las fórmulas anteriores; para ésto procedemos como sigue:

Para obtener A_n aplique el comando `factor` a la expresión: $d\left(\sum_{k=0}^{n-1}(1-r)^k\right)$, lo cual produce $d\left[\frac{1}{r} - \frac{(-(r-1))^n}{r}\right]$, que es una expresión equivalente a la que aparece arriba (figura 7).

Un procedimiento similar se aplica para obtener C_n, salvo que ahora la sumatoria que

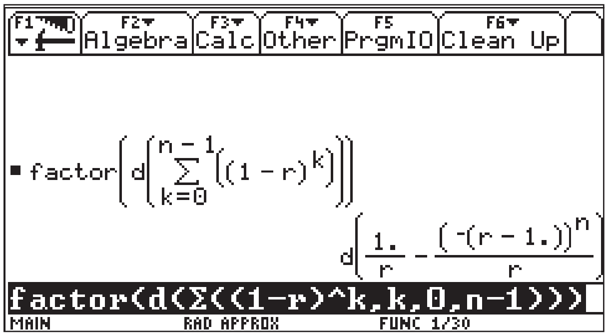

Figura 7
Uso de la calculadora para determinar A_n

define a C_n inicia en uno. ¿Cómo procederá para obtenerlo?

Con el uso de la calculadora se puede abordar parte de la siguiente pregunta ¿Qué ocurre cuando *r* toma los valores 0, 1/2, 1? Interprete estos resultados.

En la discusión anterior se tomó como dato importante el factor de eliminación del organismo. ¿Qué formulación se tiene para un tratamiento en el que se conoce el factor de retención? Es decir, si conocemos que la cantidad de medicamento que tiene el cuerpo del paciente al momento de un suministro, es *r* veces la cantidad máxima alcanzada *t* minutos después del suministro previo?, ¿qué formulación se tiene para este caso?

Visión retrospectiva del proceso de solución. El proceso de solución del problema ofrece oportunidades para que los estudiantes:

a) obtengan información numérica y la organicen de manera sistemática

b) se percaten de la utilidad que tiene el usar diferentes representaciones de la información disponible, en particular resalta la importancia de sistematizar la información mediante el uso de una lista ordenada de los datos, es decir, por medio de una tabla, lo que a la vez permite la construcción de una gráfica a partir de los datos

c) comparen la consistencia entre los resultados obtenidos directamente de las condiciones del problema con los que se obtienen de fórmulas obtenidas en la discusión

d) valoren la importancia de abordar casos particulares en el proceso de solución de un problema

e) generalicen a partir del estudio de casos particulares. Esto les muestra la necesidad de usar símbolos y términos para abordar situaciones generales.

4. Guía de aplicación para el estudiante

Nombre del estudiante:
Nivel:
Escuela:
Dependencia
Fecha:

Instrucciones. Lea cuidadosamente la descripción y explicación que un médico le proporciona a su *ayudante de laboratorio* cuando se prescribe medicamento. Conteste las preguntas que se indican mostrando todas las ideas y recursos matemáticos que emplee en el proceso de solución.

Descripción del suministro. Un médico examina a un paciente y le receta un tipo de medicamento que le ayude a combatir cierta enfermedad. Por cada suministro, la dosis de sustancia activa del medicamento que le receta es de 16 unidades. El médico le da la siguiente descripción del suministro a su *ayudante de laboratorio* con la finalidad de hacer un estudio posterior.

a) Dosis por cada suministro son de 16 unidades.

b) Cuando el paciente recibe un suministro de medicamento, su organismo inicia inmediatamente un proceso para asimilar las **16 unidades**, y este proceso termina a los 10 minutos de iniciado. Así, diez minutos después del primer suministro, el cuerpo del paciente habrá asimilado la cantidad total de sustancia activa que le fue suministrada.

c) Al momento que el organismo del paciente asimila el total de la sustancia activa que le fue suministrada, se inicia un proceso de eliminación del medicamento.

d) Cuando la cantidad máxima de medicamento previa a un suministro se ha **reducido a la mitad**, tiene lugar el siguiente, iniciándose un aumento en la cantidad de sustancia activa en el organismo del paciente. Para el medicamento que se está suministrando, el médico indica que esa reducción se logra **cada 4 horas** a partir de suministro. Por ejemplo, el segundo suministro se realizará cuando la cantidad de sustancia activa sea de 8 unidades, lo cual ocurrirá cuando hayan transcurrido cuatro horas después del primer suministro.

e) El paciente recibirá varios suministros durante el tratamiento.

A partir de esta descripción del suministro, responda las siguientes preguntas relacionadas con la cantidad de sustancia activa que permanecerá en el cuerpo del paciente en diferentes momentos:

Comprensión de la situación o problema. Explique en forma verbal y con sus propias palabras la descripción del suministro.

- ¿Qué cantidad de sustancia recibe el paciente en cada suministro?
- ¿Cuánto tiempo transcurre en asimilar la primera dosis?
- ¿En cuánto se ha reducido la cantidad de sustancia al momento del segundo suministro?

Diseño y puesta en práctica de un plan

a) ¿Qué cantidad de medicamento ha retenido el organismo del paciente al momento de cada suministro? En una tabla, describa la cantidad de sustancia activa que permanece en el cuerpo del paciente en el momento que se realiza el suministro, durante las primeras treinta y seis horas.

b) ¿Qué cantidad de medicamento se acumula en el organismo 10 minutos después de cada suministro? En una tabla describa la cantidad de medicamento que acumula el organismo del paciente 10 minutos después de cada suministro durante las primeras treinta y seis horas.

c) A partir de la información incluida en las tablas anteriores, represente en una gráfica la cantidad de sustancia activa que retiene el paciente en el momento de cada suministro (cada 4 horas) y diez minutos después de éste.

d) Describa lo que se observa en la gráfica, en términos del seguimiento del tratamiento. ¿Qué diferencias resaltan entre las representaciones tabular y gráfica de la información referente al tratamiento?

e) En una tabla, describa la cantidad de sustancia activa en el organismo del paciente para los primeros 7 suministros. El resultado expréselo como se indica en los siguientes ejemplos. La cantidad de sustancia activa en el tercer y cuarto suministro se puede repre-

sentar como
$(8 + 16)/2$ y $[(8 + 16)/2 + 16]/2 = (8 + 16 + 2 \cdot 16)/2$, respectivamente (explique). ¿Existe alguna regularidad o patrón en la cantidad de sustancia activa para cada suministro? ¿Cómo se puede expresar la cantidad de sustancia activa para cada suministro? ¿Cómo se puede expresar la cantidad de sustancia activa almacenada por el organismo del paciente en el *n*-ésimo suministro?

f) Determine la expresión que ayude a calcular la cantidad de sustancia activa 10 minutos después del *n*-ésimo suministro.

g) Se observa (figura 8) que en dos suministros consecutivos, n y $(n + 1)$ existe un momento (10 minutos después del primer suministro) donde la cantidad del primer suministro C_n se incrementa en 16 unidades. Si se unen con rectas los puntos (n, C_n), $(n + 1/24, C_n + 16)$ y $(n + 1, C_{n+1})$ calcule las pendiente de estas dos rectas. ¿Qué significa el valor de las pendientes en relación al tratamiento?

h) En las condiciones del tratamiento se observa que el paciente tiene un factor de eliminación de 1/2, lo cual significa que al momento de un suministro, el organismo ha eliminado la mitad de la cantidad máxima que alcanzó 10 minutos después del suministro previo. ¿Cuál es el comportamiento en un proceso similar al anterior para un paciente que tiene un factor de eliminación de 1/3? ¿Cuál es el comportamiento en un proceso similar al anterior para un paciente con factor de eliminación de 1/4?

I) Caso General. Si ahora en cada suministro el paciente recibe d unidades de sustancia activa, el factor de eliminación es r y se mantiene el cuadro de comportamiento anterior, entonces la siguiente tabla describe los primeros tres suministros y lo que ocurre en cuanto a la cantidad de sustancia activa en el cuerpo del paciente al momento del suministro y diez minutos después de éste.

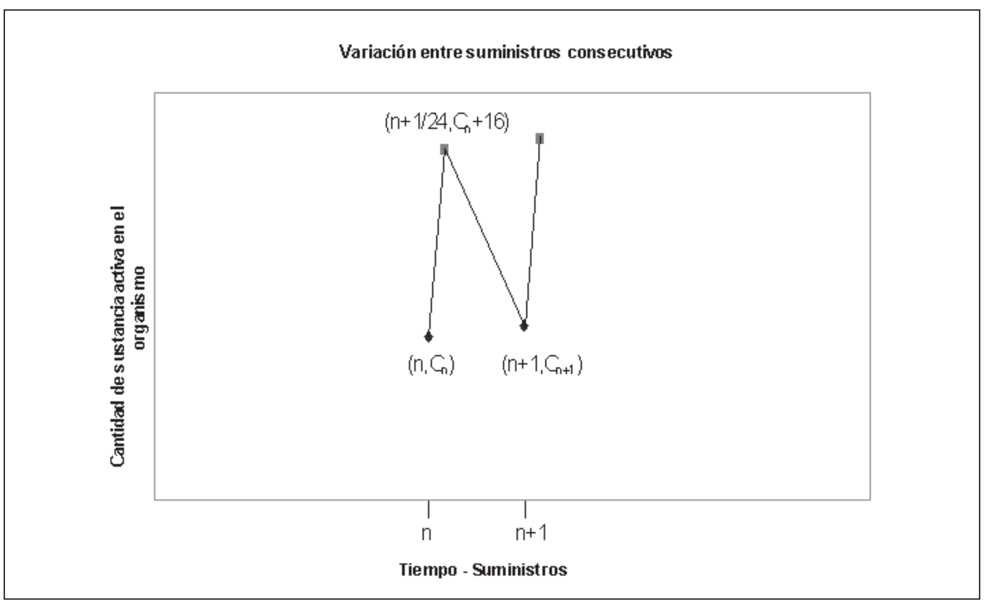

Figura 8

Complete la tabla 5 para los suministros Nos. 4, 5 y 6. Encuentre una expresión general que describa lo que ocurre en el n-ésimo suministro.

Tabla 5

Suministro No.	Cantidad de sustancia activa en el cuerpo al momento del suministro	Cantidad de sustancia activa en el cuerpo 10 minutos después del suministro
1	0	d
2	$d + rd = d(1 - r)$	$d\,(1 - r) + d = d\,[(1 - r) + 1]$
3	$d[(1 - r) + 1] - rd\,[(1 - r) + 1]$ $= \quad d\,[(1 - r) + 1]\,[1 - r]$ $= \quad d\,[(1 - r)^2 + (1 - r)]$	$d\,[(1 - r)^2 + (1 - r)] + d$ $= \quad d\,[(1 - r)^2 + (1 - r) + 1]$
4		
5		
6		