APÉNDICE A

Aplicaciones de la optimización lineal usando hojas de cálculo

Marco Antonio Montufar Benítez
Eva Selene Hernández Gress

APÉNDICE A

Aplicaciones de la optimización lineal usando hojas de cálculo

Introducción

Como era de esperar, muy pocos problemas de programación lineal (PL) de la vida cotidiana implican únicamente dos variables de decisión. Por tanto, la solución gráfica tiene un valor limitado en la solución de estos. Sin embargo, la discusión de problemas con dos variables proporciona una base para la comprensión de los problemas de PL y las estrategias generales para resolverlos. Por ejemplo, todos los problemas solucionables de PL tienen una región factible y una solución óptima, que se encuentra en algún punto extremo de la región (en el caso que el problema no sea ilimitado). Esto es cierto para todos los problemas de PL con independencia del número de variables de decisión.

A pesar de que es bastante fácil graficar la región factible para un problema de PL con dos variables, resulta en extremo difícil visualizar o representar de manera gráfica la región factible de uno con tres variables, porque es de tres dimensiones. De igual forma, si el problema es de más de tres variables, es prácticamente imposible visualizar o representar gráficamente su región factible, porque implica más de tres dimensiones. Por fortuna, existen varias técnicas matemáticas para resolver problemas de programación lineal con casi cualquier número de variables sin visualizar o graficar sus regiones factibles. Estas técnicas están ahora integradas en paquetes de hojas de cálculo, por lo que la solución de problemas de PL es una tarea bastante simple.

Por tanto, si se utiliza el software adecuado se puede resolver con facilidad casi cualquier problema de PL. El principal desafío es garantizar que sea posible formular y comunicar de manera correcta el problema que quiere resolverse.

Solucionadores para hojas de cálculo

Los programas Excel, Quattro Proy, Lotus 1-2-3 incluyen algunos complementos de optimización de hoja de cálculo llamados solucionadores (solvers). La inclusión del interesado en estas aplicaciones demuestra la importancia de la programación lineal (y la optimización en general). En esta sección se abordará solo el uso de Excel para ilustrar la forma en que los solucionadores de una hoja de cálculo pueden resolver problemas de optimización. Sin embargo, los mismos conceptos y técnicas que aquí se presentan se pueden aplicar a otros paquetes de hojas de cálculo, aunque pueden diferir algunos de los detalles de la aplicación.

De igual forma, se pueden resolver problemas de optimización sin necesidad de utilizar una hoja de cálculo, al emplear solo un paquete de programación matemática especializada. Una lista parcial de estos paquetes incluye: LINDO, MPSX, CPLEX y MathPro. Por lo regular, estos paquetes son utilizados por los investigadores y las empresas interesadas en la solución de problemas muy grandes, debido a que no caben convenientemente en una hoja de cálculo.

Solución de problemas de programación lineal (PL) con una hoja de cálculo

En este punto se demuestra con detalle la mecánica del uso del Solver en Excel mediante la solución del siguiente problema.

En un inicio solo se presenta su enunciado y planteamiento.

Problema resuelto

Luisa Caoba es la propietaria de una empresa que vende dos modelos de mesas de madera: la redonda grande y la cuadrada de lujo. Para la fabricación de ambas mesas, Luisa compra madera sólida y triplay.

Cada mesa redonda requiere nueve horas de mano de obra, un pie de triplay y 12 pies de madera sólida; mientras que cada mesa cuadrada requiere seis horas de mano de obra, un pie de triplay y 16 pies de madera sólida. La demanda de estos productos es tal que cada mesa redonda que se produzca se puede vender a un costo que genera una ganancia de 350 pesos, y cada mesa cuadrada que se produzca se puede vender a un costo que genera una ganancia de 300 pesos. La compañía espera contar con 200 pies de triplay, 1 566 horas de mano de obra y 2 880 pies de madera sólida durante el próximo ciclo de producción. El problema es determinar el número óptimo de mesas redondas y cuadradas a producir para maximizar los beneficios.

Si X_1 representa el número de mesas redondas y X_2 el número de mesas cuadradas que se van a producir, el siguiente modelo de PL representa el problema a resolver:

$$\text{Máx: } 350X_1 + 300X_2 \text{ \} utilidad}$$

Sujeto a:

1. $1X_1 + 1X_2 \leq 200$ } restricción de triplay.
2. $9X_1 + 6X_2 \leq 1566$ } restricción de mano de obra.
3. $12X_1 + 16X_2 \leq 2880$ } restricción de madera sólida.
4. $1X_1 \geq 0$ } frontera inferior simple.
   $1X_2 \geq 0$ } frontera inferior simple

¿Cómo podemos resolver este problema en una hoja de cálculo?

Solución

En primer lugar, se debe construir el modelo.

Pasos para implementar un modelo de PL en una hoja de cálculo

Los cuatro pasos siguientes resumen lo que se debe hacer para implementar cualquier problema de PL en una hoja de cálculo.

1. **Organizar los datos para el modelo de la hoja de cálculo.** Los datos para el modelo constarán de los coeficientes de la función objetivo y las limitaciones o restricciones, así como los valores del lado derecho (RHS) para las restricciones. Por lo general, existe más de una forma de organizar los datos de un problema particular en una hoja de cálculo, pero se deben tener en cuenta algunas pautas generales. En primer lugar, el objetivo es organizar los datos de acuerdo con su propósito y significado, tan claro como sea posible. Piénsese en la hoja de cálculo como un informe de gestión necesario para comunicar con claridad los factores importantes del problema que se está resolviendo. Para lograrlo, se requiere invertir algún tiempo organizando mentalmente los datos del problema. Además de visualizar cómo pueden colocarse y ordenarse de manera lógica, antes de empezar a escribir sus valores en la hoja de cálculo. Luego, resulta indispensable colocar etiquetas descriptivas en la hoja de cálculo para identificar con claridad los diversos elementos de datos. A menudo, las estructuras de fila y columna de los datos pueden ser utilizadas en la hoja de cálculo para facilitar la implementación del modelo. (Hay que tener en cuenta que algunos o todos los coeficientes y valores para un modelo de PL pueden calcularse a partir de otros datos, referidos con frecuencia como primarios. Por tanto, es mejor mantener los datos primarios en la hoja de cálculo y hacer uso de fórmulas adecuadas para calcular los coeficientes y valores necesarios para la formulación del modelo de PL. Entonces, si hay algún cambio en los datos primarios, se deberán hacer modificaciones pertinentes de forma automática en los coeficientes del modelo de PL.)
2. **Reservar celdas separadas en la hoja de cálculo para representar a cada variable de decisión en el modelo algebraico**. Aunque se puede utilizar cualesquiera celdas vacías en una hoja de cálculo para representarlas variables de decisión, por lo general es mejor ordenarlas de manera paralela a la estructura de los datos. Esto, a menudo, es útil en el establecimiento de fórmulas para la función objetivo y las restricciones. Cuando sea posible, también es una buena idea para mantener las celdas que representan variables de decisión en la misma área de la hoja de cálculo. Además, se deben utilizar las etiquetas descriptivas para clarificar su significado.
3. **Crear una fórmula en una celda de la hoja de cálculo que corresponda a la función objetivo en el modelo algebraico**. La fórmula de hoja de cálculo correspondiente a la función objetivo se crea haciendo referencia a las celdas de datos, donde los coeficientes de la función objetivo se introducen (o calculan) y las celdas correspondientes que representan las variables de decisión.

4. **Para cada restricción, crear una fórmula en una celda separada en la hoja de cálculo, que corresponda al lado izquierdo (LHS) de la restricción**. La fórmula correspondiente al primer miembro de cada restricción se crea haciendo referencia a las celdas de datos donde se introducen(o calculan) los coeficientes para estas limitaciones ya las celdas de las variables de decisión apropiadas. Muchas de las fórmulas de restricción tienen una estructura similar. Por tanto, cuando sea posible, se deben crear fórmulas de restricción que puedan copiarse para aplicar otras fórmulas de restricción. Esto no solo reduce el esfuerzo necesario para implementar un modelo, sino que también ayuda a evitar errores de mecanografía difíciles de detectar.

Aunque, para implementar un modelo de programación lineal en una hoja de cálculo es necesario realizar cada uno de los pasos anteriores, estos no tienen que realizarse en el orden indicado. Se considera prudente realizar primero el paso 1, seguido por el paso 2. Sin embargo, el orden en el que los pasos 3 y 4 se llevan a cabo a menudo varía de un problema a otro. De igual forma, es aconsejable utilizar sombreado, colores de fondo y fronteras para identificarlas celdas que representan variables de decisión, las restricciones y la función objetivo en un modelo. Esto permite al usuario de una hoja de cálculo distinguir con mayor facilidad entre las celdas que representan los datos en bruto (que pueden ser cambiados) y otros elementos del modelo.

Hay más cosas que decir acerca de cómo diseñar e implementar modelos de hojas de cálculo eficaces para problemas de PL; pero, antes, veamos cómo se utilizan los pasos anteriores al implementar un modelo de hoja de cálculo para nuestro problema de ejemplo.

Modelo en hoja de cálculo para el problema de Luisa Caoba

Una posible representación de hoja de cálculo para nuestro problema de ejemplo se observa en la figura A1 (y en el archivo llamado Figura x-1.xls en el disco de datos).

Para conocer más acerca de la creación de este modelo, se analizará paso a paso su creación, a fin de que se pueda observar cómo se relaciona con la formulación algebraica del modelo.

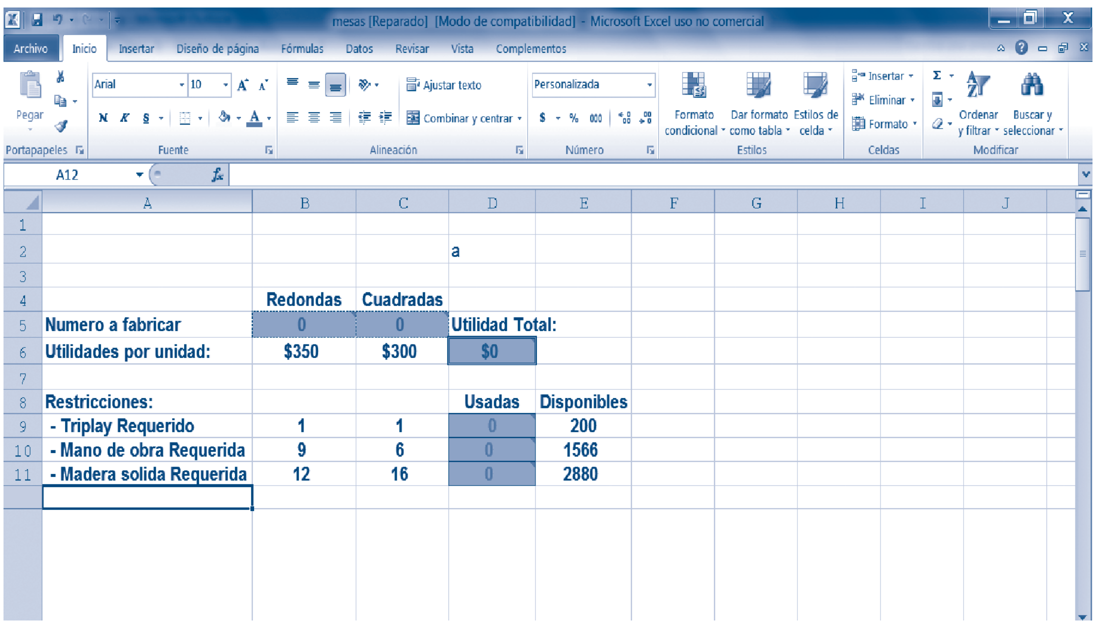


Figura A.1 Modelo en hoja de cálculo para el problema de producción de mesas.

Organización de los datos

Uno de los primeros pasos en la creación de cualquier modelo de hoja de cálculo para un problema de PL es organizar los datos en el modelo de hoja de cálculo. En la figura A.1, se introdujeron las utilidad es unitarias de las mesas redonda y cuadrada, en las celdas B6 y C6, respectivamente. A continuación, se introdujo el número de pies de triplay, el número de horas de trabajo y pies de madera sólida necesarios para producir cada tipo de mesa, en las células B9 a C11, de manera respectiva. En tanto, los valores de las celdas B9 y C9 indican que se requiere un pie de triplay para producir cada tipo de mesa. Por su parte, los valores de las celdas B10 y C10 muestran que cada mesa redonda producida requiere nueve horas de trabajo, mientras que cada mesa cuadrada necesita seis. De igual forma, las celdas B11 y C11 indican que cada mesa redonda producida requiere de 12 pies de madera sólida, y cada mesa cuadrada de 16. El número disponible de pies de triplay, horas de trabajo y pies de madera sólida se introducen en las celdas E9 a E11. Obsérvese que en este caso se requieren etiquetas apropiadas para identificar todos los elementos de datos para el problema.}

Representación de las variables de decisión

Como se observa en la figura A.1, las celdas B5 y C5 representan las variables de decisión X_1 y X_2 en nuestro modelo algebraico; estas se hallan sombreadas y resaltadas con fronteras discontinuas para distinguirlas visualmente de otros elementos del modelo. Se colocaron valores de cero en las celdas B5 y C5, debido a que no se sabe cuántos modelos deben ser producidos. En breve, se utilizará Solver para determinar los valores óptimos para estas celdas.

Representación de la función objetivo

El siguiente paso en la implementación de nuestro problema de PL es crear una fórmula en una celda de la hoja de cálculo para representarla función objetivo; esto podemos lograrlo de muchas maneras. Debido a que la función objetivo es $350X1 + 300X2$, puede tenerse la tentación de introducir la fórmula = 350 * B5 + 300 * C5 en la hoja de cálculo. Sin embargo, si se desea cambiar los coeficientes de la función objetivo, sería necesario volver atrás y editar esta fórmula para reflejarlos cambios. Debido a que los coeficientes de la función objetivo se introducen en las celdas B6 y C6, una mejor manera de implementar esta función es hacer referencia a los valores de las celdas B6 y C6 en lugar de introducir constantes numéricas en la fórmula. La fórmula para la función objetivo se introduce en la celda D6 como:

D6: = B6 * B5 + C6 * C5

Como se muestra en la figura A.1, la celda D6 de vuelve inicialmente el valor 0, porque las celdas B5 y C5 contienen ceros. En tanto, la figura A.2 resume la relación entre la función objetivo algebraica y la fórmula introducida en la celda D6. De esta manera, si los beneficios obtenidos en las mesas cambian, el modelo de hoja de cálculo se puede modificar con facilidad y el problema puede ser resuelto para determinar el efecto de estos cambios en la solución óptima. Tenga en cuenta quela celda D6 se ha sombreado y delineado con un borde doble para distinguirlo de otros elementos del modelo.

Función objetivo algebraica: $350X_1 + 300X_2$

Fórmula en la celda D6: = B6 * B5 + C6 * C5

Figura A.2

Representación de las restricciones

El siguiente paso en la construcción del modelo de hoja de cálculo consiste en la implementación de las restricciones del modelo de programación lineal. Ya antes se dijo que para cada restricción en el modelo algebraico, se debe crear una fórmula en una celda de la hoja de cálculo que corresponde al lado izquierdo de la restricción (LHS). El LHS de cada restricción en nuestro modelo es:

Triplay: $1X_1 + 1X_2 \leq 200$

Mano de obra: $9X_1 + 6X_2 \leq 1\,566$

Madera sólida: $12X_1 + 16X_2 \leq 2\,880$

En este caso, es necesario establecer tres celdas en la hoja de cálculo para representarlas fórmulas LHS de las tres restricciones. Una vez más, esto se hace con referencia a las celdas de datos que contienen los coeficientes para estas restricciones y las celdas que representan las variables de decisión. El LHS para la primera restricción se introduce en la celda D9 como:

D9: = B9 * B5 + D9 * C5

Del mismo modo, el LHS de la segunda y tercera restricción es se introducen en las celdas D10 y D11 como:

D10: = B10 * B5 + C10 * C5

D11: = B11 * B5 + C11 * C5

Estas fórmulas calculan el número de pies de triplay, horas de trabajo y pies de madera sólida requerida para la fabricación de las mesas representadas por las celdas B5 y C5. Téngase en cuenta que las celdasD9a D11 están sombreadas y se delimitan con fronteras sólidas, para distinguirlas de los otros elementos del modelo. Como se sabe, la empresa tiene 200 pies de triplay, 1566 horas de mano de obra y 2880 pies de madera sólida disponibles durante su próximo ciclo de producción. En nuestra formulación algebraica del modelo de PL, estos valores representan los valores del lado derecho (RHS) para las tres restricciones. Por tanto, estos tres valores se introdujeron en las celdas E9, E10 y E11, respectivamente, y representan los valores límites superiores que las celdas D9, D10 y D11 pueden tomar.

Representación de los límites sobre las variables de decisión

¿Qué pasa con los límites inferiores simples para nuestras variables de decisión, representados por $X_1 \geq 0$ y $X_2 \geq 0$? Estas condiciones son bastante comunes en problemas de PL y se conocen como condiciones de no negatividad, ya que indican quelas variables de decisión pueden asumir solo valores no negativos. Estas condiciones pueden ser vistas como restricciones e implementarse como las otras restricciones. Sin embargo, Solver permite especificar límites superiores e inferiores simples para las variables de decisión haciendo referencia directa a las celdas que representan estas variables. Por tanto, en este punto, no se toma ninguna medida específica para considerar estos límites en nuestra hoja de cálculo.

¿Cómo ve Solver el modelo?

Después de la implementación de nuestro modelo en la hoja de cálculo, es posible utilizar Solver para encontrar la solución óptima al problema. No obstante, primero es necesario definir los siguientes tres componentes de nuestro modelo de hoja de cálculo para Solver:

1. **Celda destino**. Celda que representa la función objetivo en el modelo (y si su valor debe ser maximizado o minimizado).
2. **Celdas variables (o cambiantes).** Celdas que representan las variables de decisión en el modelo.
3. **Celdas de restricción**. Celdas que representan las fórmulas de los lados izquierdos de las restricciones en el modelo (y los límites superior e inferior que se apliquen a estas fórmulas).

Estos componentes corresponden directamente a las celdas en la hoja de cálculo que se establecieron en la implantación del modelo de programación lineal. Por ejemplo, en la hoja de cálculo para el problema ejemplo, la celda destino está representada por la celda D6; mientras que las celdas variables o cambiantes están representados por las celdas B5 y C5; y las celdas de restricción, por las celdas D9, D10 y D11. La figura A.3 muestra estas relaciones, así como una nota de celda que justifica el motivo de la celda D6. Las notas de celda pueden ser una manera muy eficaz de describir detalles sobre el propósito o el significado de varias celdas en un modelo.

Mediante la comparación de la figura A.1 con la figura A.3, se puede ver la relación directa entre la forma en que formulamos modelos de PL algebraicamente y cómo Solver ve la implementación del modelo en la hoja de cálculo. Las variables de decisión en el modelo algebraico corresponden a las celdas variables (o cambiantes) de Solver. Las fórmulas de los lados izquierdos (LHS) para las restricciones en el modelo algebraico corresponden a las celdas restricción en Solver. Finalmente, la función objetivo en el modelo algebraico corresponde a la celda objetivo en Solver. Entonces, aunque la terminología que usa Solver para describir los modelos en hoja de cálculo es de alguna manera diferente de la que se usas para describir el modelo de PL algebraicamente, los conceptos son los mismos.

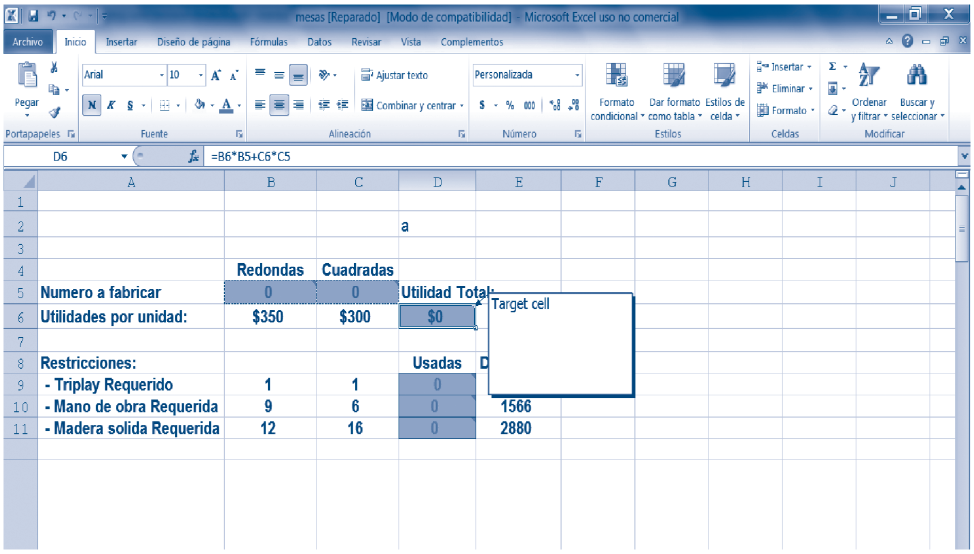


Figura A.3

Usando Solver

Después de implementar el modelo en una hoja de cálculo, se hace imperante resolverlo. Para hacerlo, primero se debe indicar a Solver cuáles son las celdas en la hoja de cálculo que representan la función objetivo, las variables de decisión y las restricciones. Para llamar a Solver en Excel, primero se selecciona el comando Solver del menú Datos (Excel 2010), como se aprecia en la figura A.4. Esto permite desplegar la caja de diálogo que se muestra en la figura A.5.

Premium Solver para Educación posee tres diferentes algoritmos para resolver problemas de optimización: Estándar GRG no lineal, Simplex Estándar (LP) y Evolucionario Estándar. Si el problema que se está tratando de resolver es de programación lineal, Solver puede usar un algoritmo especial conocido como el *método simplex* para resolver el problema, como se puede observaren la figura A.5.

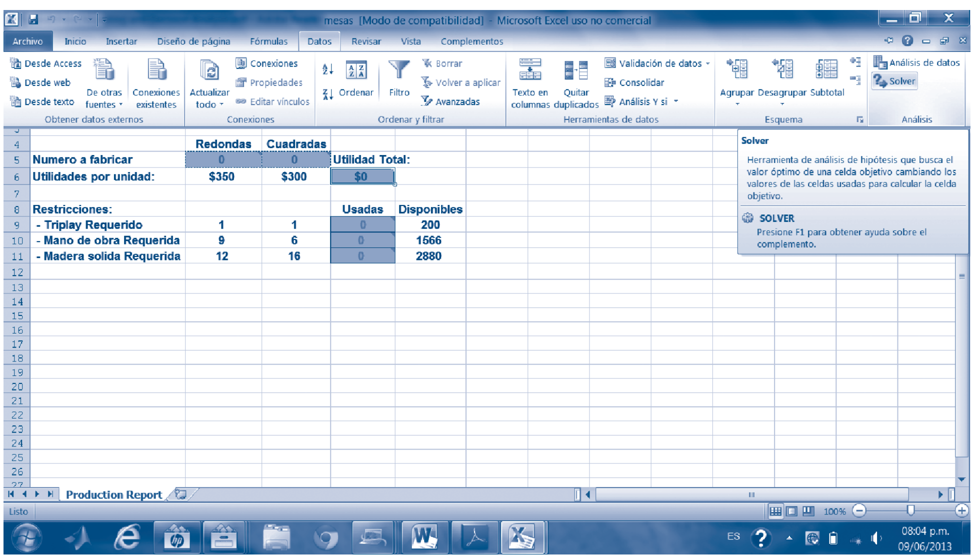


Figura A.4 Forma de acceso a Solver en Office 2010.

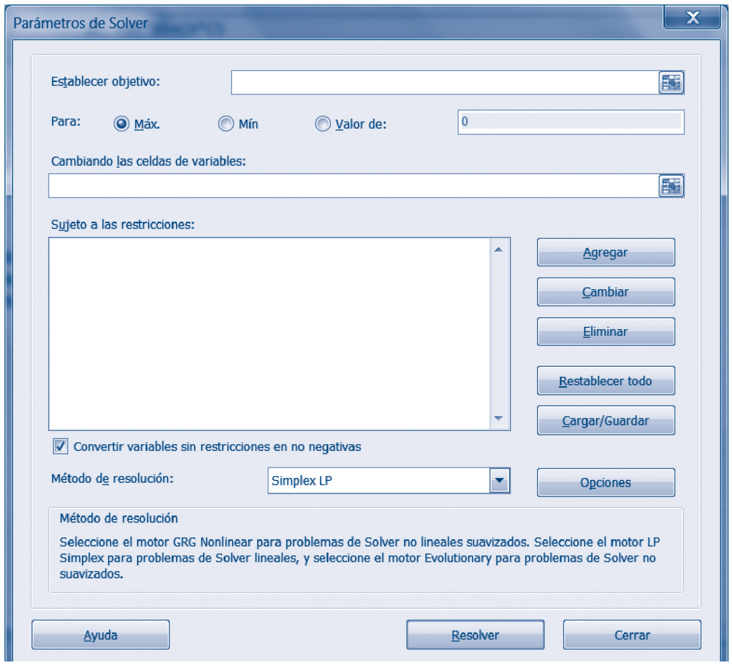


Figura A.5 Caja de diálogo para los parámetros de Solver.

Definiendo la celda objetivo

El siguiente paso en este proceso es el cuadro de diálogo de los parámetros de Solver, donde es necesario especificarla ubicación de la celda que representa la función objetivo mediante la introducción en la opción *Establecer objetivo*, como se muestra en la figuraA.6.

Obsérvese que la celda D6 contiene una fórmula que representa la función objetivo para nuestro problema ejemplo y que Solver nos instruye para tratar de maximizar este valor, según lo especificado por el botón Máx. En caso contrario, se deberá seleccionar el botón Mín cuando se desee que Solver encuentre una solución que minimice el valor del objetivo. El botón de valor puede ser utilizado para encontrar una solución para los que la función objetivo toma un valor específico.

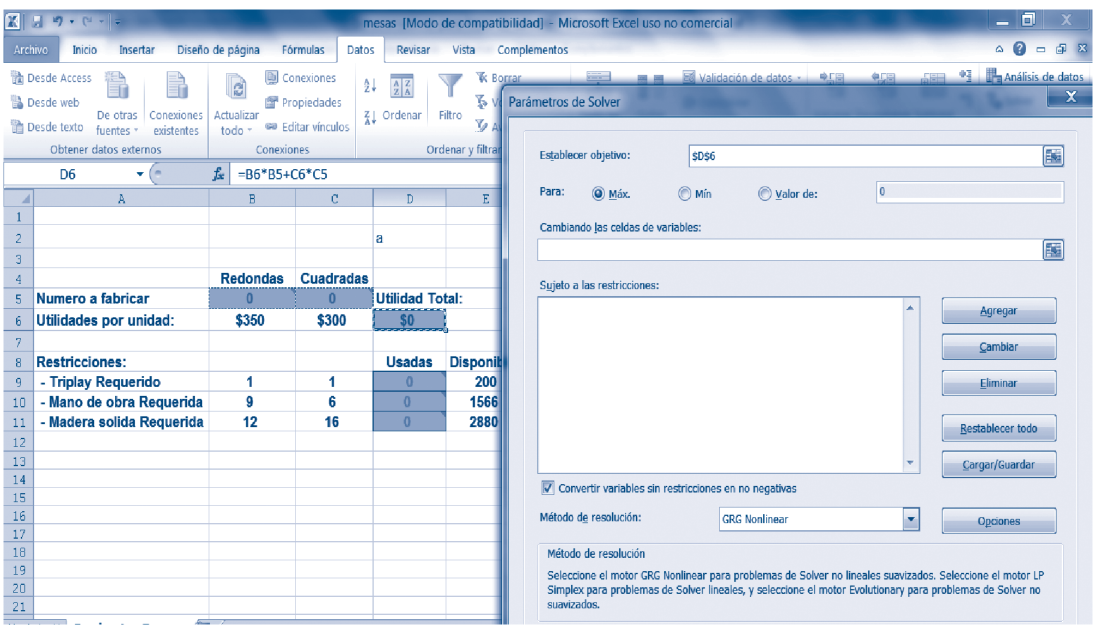


Figura A.6 Establecimiento de la celda objetivo.

Definiendo las celdas variables

Para resolver el problema de programación lineal, también es necesario indicar en el modelo las celdas que representan las variables de decisión. Una vez más, Solver se refiere a estas como celdas variables. En el problema de ejemplo, las celdas variables se especifican en la figura A.7.

En este caso, las celdas B5 y C5 representan las variables de decisión para el modelo; Solver determinará los valores óptimos para estas celdas. Si las variables de decisión no están representadas en un rango continuo de celdas, habría que enumerar las celdas de variables de decisión individuales separadas por comas, como se muestra en el ejemplo de la opción *Cambiando las celdas variables*. Siempre que sea posible, lo mejor es utilizar celdas contiguas para representarlas variables de decisión.

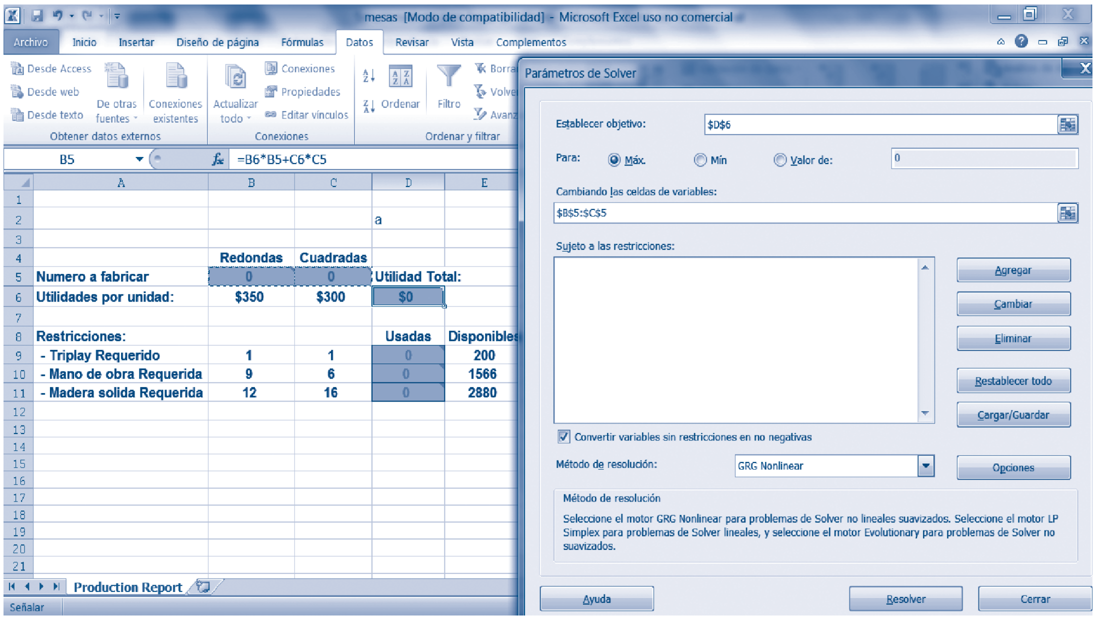


Figura A.7 Introducción de las celdas variables.

Definiendo las celdas de restricción

A continuación, hay que definirlas celdas de restricción en la hoja de cálculo y las restricciones que deben aplicarse a estas. Como se mencionó antes, las celdas de restricción son aquellas en las que se implementaron las fórmulas de los lados derechos (LHS) para cada restricción en el ejemplo modelo. Para definir las celdas de restricción, primero es necesario clic en el botón *Agregar*, que se observa en lafiguraA.8 y, a continuación, completar el cuadro de diálogo *Agregar restricción*, como se muestra en la figura A.9. En el cuadro de diálogo *Agregar restricción*, de nuevo se deberá hacer clic en *Agregar*, para definir restricciones adicionales. Por último, se deberá hacer clic en el botón *Ok* cuando se haya termine de definir restricciones.

Las celdas D9a D11 representan las restricciones cuyos valores deben ser menores o iguales a los valores de las celdas E9 a E11, respectivamente. Si las celdas de restricción no son celdas contiguas en la hoja de cálculo, habría que definir las celdas de restricción repetidamente. De la misma manera que con las celdas de variables, por lo general es mejor elegir celdas contiguas en la hoja de cálculo para poner en práctica las fórmulas LHS de las restricciones en un modelo.

Definiendo las condiciones de no negatividad

El último paso consiste en establecer que las variables de decisión no sean negativas. En la figura A.8 se puede observar, en el cuadro de diálogo de los parámetros de Solver, marcada la caja *Convertir variables sin restricción en no negativas*, esto significa que las variables de decisión en las celdas B5 y C5 son no negativas.

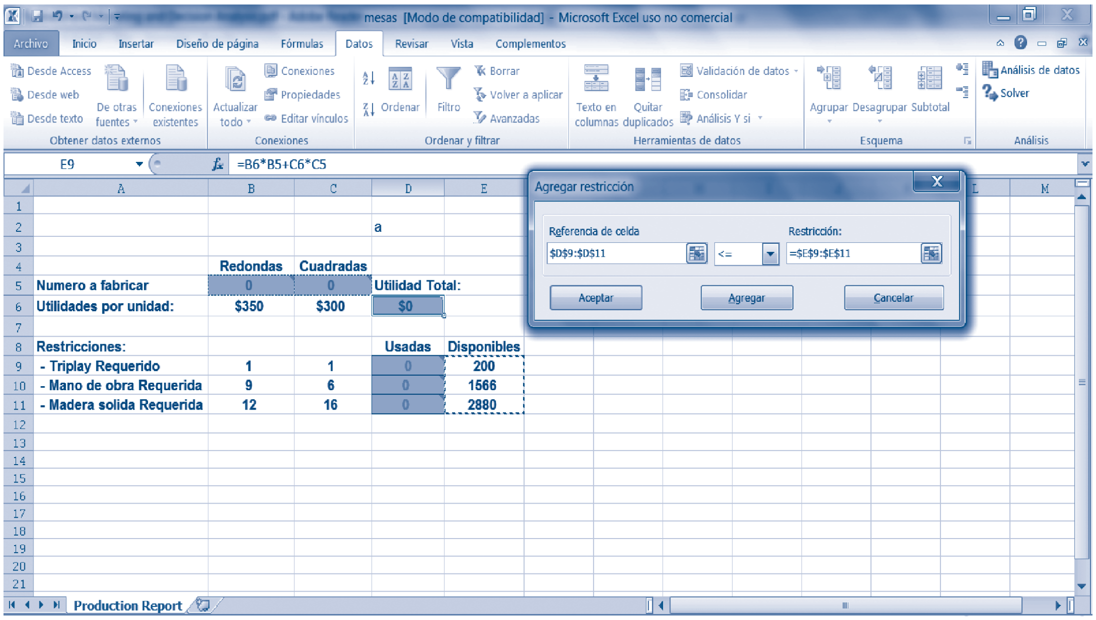


Figura A.8 Introducción de las restricciones del modelo.

Resolviendo el modelo

Una vez que se introducen todos los parámetros y se eligen las opciones necesarias para el modelo, el siguiente paso es resolver el problema. Para ello, primero se hace clic en el botón *Resolver*, en el cuadro de diálogo de los Parámetros de Solver, para resolver el problema. Cuando Solver encuentra la solución óptima, se muestra el cuadro de diálogo *Resultados de Solver* que se puede observaren la figura A.9; si los valores de la pantalla no coinciden con los de esta figura, se debe hacer clic en los botones *Restaurar valores originales* y *Aceptar*, y volverlo a intentar.

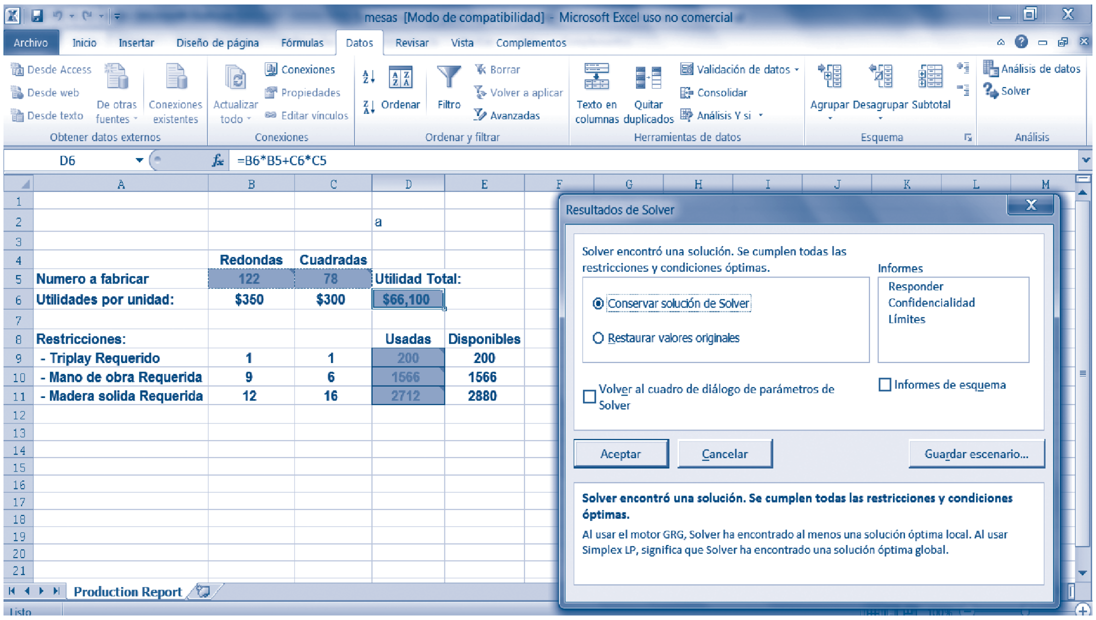


Figura A.9 Solución óptima para el problema ejemplo.

Este cuadro de diálogo proporciona opciones para mantener la solución encontrada por Solver o la restauración de la hoja de cálculo a su condición original. Por lo común, es muy probable que se quiera mantener la solución de Solver, a menos que hay a un problema con este.

Como se aprecia en la figura A.9, Solver ha determinado que el valor óptimo para la celda B5 es 122 y el valor óptimo para la celda C5 es 78. Estos valores corresponden a los valores óptimos para *X*1 y *X*2. El valor de la celda objetivo (D6) ahora indica que si la empresa produce y vende 122 mesas redondas y 78 mesas cuadradas, obtendrá un beneficio de 66 100 pesos. Las células D9, D10 y D11 indican que esta solución utiliza los 200 pies de triplay disponibles, las 1 566 horas de mano de obra disponibles y 2 712 de los 2 880 pies de madera sólida disponible.

Problema de flujo máximo

El objetivo del problema de flujo máximo es determinarla cantidad máxima de flujo que puede circular en la red. En un problema de este tipo, la cantidad de flujo que puede circular en cada uno de los arcos está limitado por alguna restricción de capacidad. Este tipo de red podría ser utilizado para, por ejemplo, modelar el flujo de aceite en una tubería (en el que la cantidad de aceite que puede fluirá través un tubo en una unidad de tiempo está limitado por el diámetro de la tubería). Además, ingenieros de tráfico también utilizan este tipo de red para determinar el número máximo de coches que pueden viajar a través de un conjunto de calles con diferentes capacidades impuestas por el número de carriles y los límites de velocidad. El siguiente ejemplo ilustra el problema de flujo máximo.

Problema resuelto

La compañía "Petróleos no mexicanos" opera un yacimiento de petróleo y refinería en México. El bruto (omita el doble sentido que esta palabra puede tener) obtenido desde el campo de petróleo se bombea a través de la red de subestaciones de bombeo, como se muestra en la figura A.10, a la refinería de la empresa que se encuentra a 500 kilómetros del campo petrolero. La cantidad de aceite que puede fluir a través de cada una de las tuberías, representado por los arcos en la red, varía debido a los diferentes diámetros de tubería. Los números próximos a los arcos en la red indican la cantidad máxima de aceite que puede fluir a través los distintos gasoductos (en miles de barriles por hora).

La compañía quiere determinar el número máximo de barriles por hora que puede fluir desde el yacimiento de petróleo a la refinería.

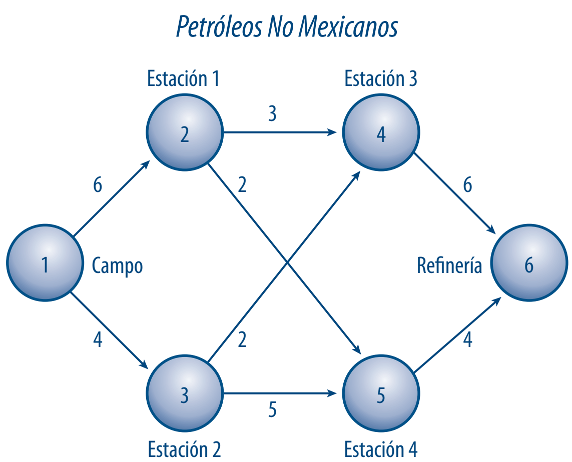


Figura A.10 Red de suministro de la empresa.

Solución

El problema de flujo máximo parece ser muy diferente de otros modelos de flujo de red, ya que no incluye los suministros o demandas de los nodos específicos. Sin embargo, el problema se puede resolver de la misma manera que un problema de transbordo, si se agrega un arco de retorno del nodo final al nodo de inicio, al asignar una demanda de 0 a todos los nodos de la red e intentar maximizar el flujo a través del arco de regreso. La figura A.11 muestra estas modificaciones. Para entender la red de dicha figura, supongamos que *k* unidades se envían del nodo 6 al nodo 1(donde k representa un entero). Debido a que el nodo 6 tiene un suministro de 0, se puede enviar *k* unidades al nodo1solo siestas pueden ser de vueltas a través de la red al nodo 6 (para equilibrar el flujo en este nodo).

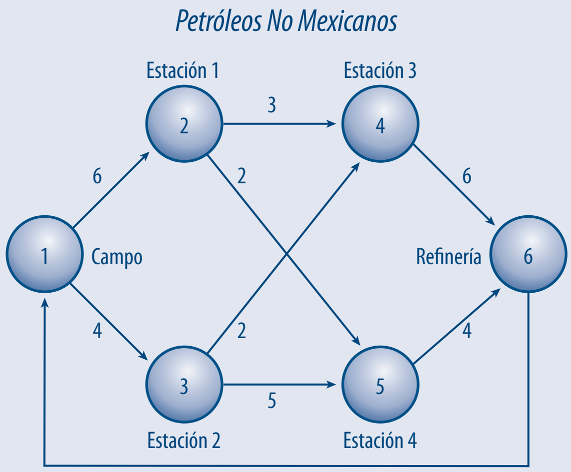


Figura A.11 Modificación de la red suministro.

Las capacidades de los arcos delimitan la cantidad de unidades que pueden ser de vueltas al nodo 6. Por tanto, el flujo máximo a través de la red corresponde al mayor número de unidades que se pueden enviar del nodo 6 al nodo 1 y de regreso a través de la red al nodo 6 (como ya se explicó). Para determinar el nivel máximo de flujo al maximizar el flujo del nodo 6 al nodo 1 se puede resolver un modelo de programación lineal, dados los límites superiores adecuados encada arco y las restricciones usuales de balance de flujo. Este modelo se representa como:

$$\text{Máx: } X61$$

Sujeto a:

$$+X61 - X12 - X13 = 0$$
$$+X12 - X24 - X25 = 0$$
$$+X13 - X34 - X35 = 0$$
$$+X24 + X34 - X46 = 0$$
$$+X25 + X35 - X56 = 0$$
$$+X46 + X56 - X61 = 0$$
$$0 \le X12 \le 6;\ 0 \le X25 \le 2;\ 0 \le X46 \le 6$$
$$0 \le X13 \le 4;\ 0 \le X34 \le 2;\ 0 \le X56 \le 4$$
$$0 \le X24 \le 3;\ 0 \le X35 \le 5;\ 0 \le X61 \le \infty$$

El modelo en hoja de cálculo y su solución

Como se muestra en la figura A.12, este modelo se implementa en la hoja de cálculo. En este caso, la columna G representa los límites superiores de cada arco mientras que la función objetivo está representada por la celda B16, que contiene la fórmula:

B16: = B14

Por su parte, la celda B14 representa el flujo del nodo 6 al nodo 1 (o X_{61}). Esta celda corresponde a la variable que queremos maximizar en la función objetivo del modelo de programación lineal. Las opciones *Parámetros de Solver* y las otras que se muestran en la figura A.13 se utilizan para obtener la solución óptima que se aprecia en la figura A.12.

Debido a que los arcos que conducen al nodo 6 (X_{46} y X_{56}) tienen una capacidad total para 10 unidades de flujo, puede ser sorprendente saber que solo nueve unidades pueden fluir a través de la red. Sin embargo, la solución óptima que se muestra en la figura A.12 indica que el flujo máximo a través de

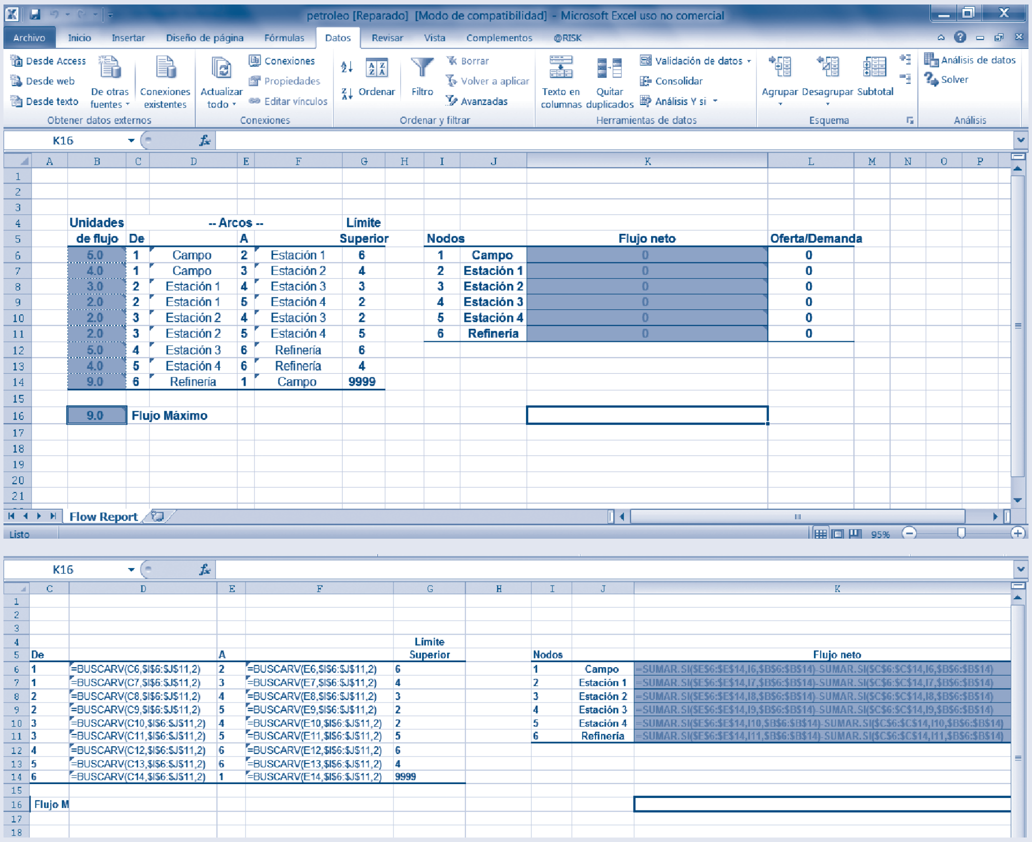


Figura A.12 Representación en la hoja de cálculo del problema de flujo máximo.

la red es justamente este. Los flujos óptimos identificados en la figura A.12 para cada arco se muestran en las casillas de las capacidades de la figura A.14; en esta también se observa que el arco del nodo 5 al nodo 6 está en su plena capacidad (cuatro unidades), mientras que el arco del nodo 4 hacia el nodo 6 esta una unidad por debajo de su plena capacidad (seis unidades). Aunque el arco del nodo 4 al nodo 6 puede llevar una unidad adicional de flujo, se impidió hacerlo porque todos los arcos que fluyen hacia el nodo 4 (X_{24} y X_{34}) están a su plena capacidad.

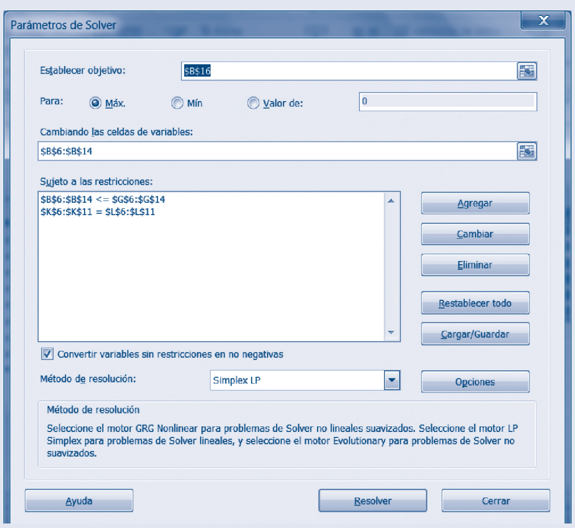


Figura A.13 Parámetros del Solver.

Un gráfico similar a la figura A.14, que resume los flujos óptimos en un problema de flujo máximo, es útil para identificar dónde sería más eficaz el aumento de las capacidades de flujo. Por ejemplo, en este gráfico, se puede ver que a pesar de que X_{24} y X_{34} están a su plena capacidad, el aumento de esta no se debe necesariamente al flujo a través de la red. El aumento de la capacidad de X_{24} permitiría un aumento del flujo a través de la red, porque una unidad adicional podría fluir desde el nodo1 hasta el nodo 2, después al nodo 4 y luego al nodo 6. Sin embargo, el aumento de la capacidad de X_{34} no permitiría un aumento en el flujo total debido a que el arco desde el nodo 1 hasta el nodo 3 ya está a plena capacidad.

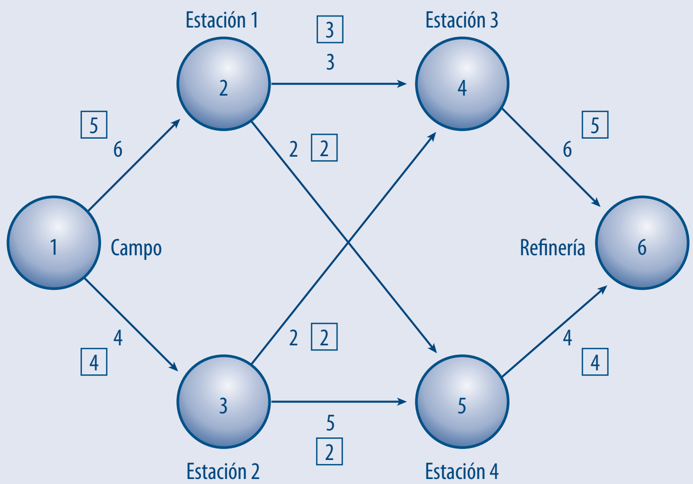


Figura A.14 Representación de la solución óptima.

Problema de transporte

Problema resuelto

La compañía de luz tiene tres centrales que cubren las necesidades de cuatro ciudades. Cada central suministra las cantidades siguientes de kilowatts-hora: planta 1, 35 millones; planta 2, 50 millones; planta 3, 40 millones. Las demandas de potencia pico en estas ciudades que ocurren a la misma hora (2:00 p.m.) son como sigue (en kw/h): ciudad 1, 45 millones; ciudad 2, 20 millones; ciudad 3, 30 millones y ciudad 4, 30 millones. Los costos por enviar un millón de kw/h de la planta dependen de la distancia que debe viajar la electricidad y se muestran en la tabla A.1.

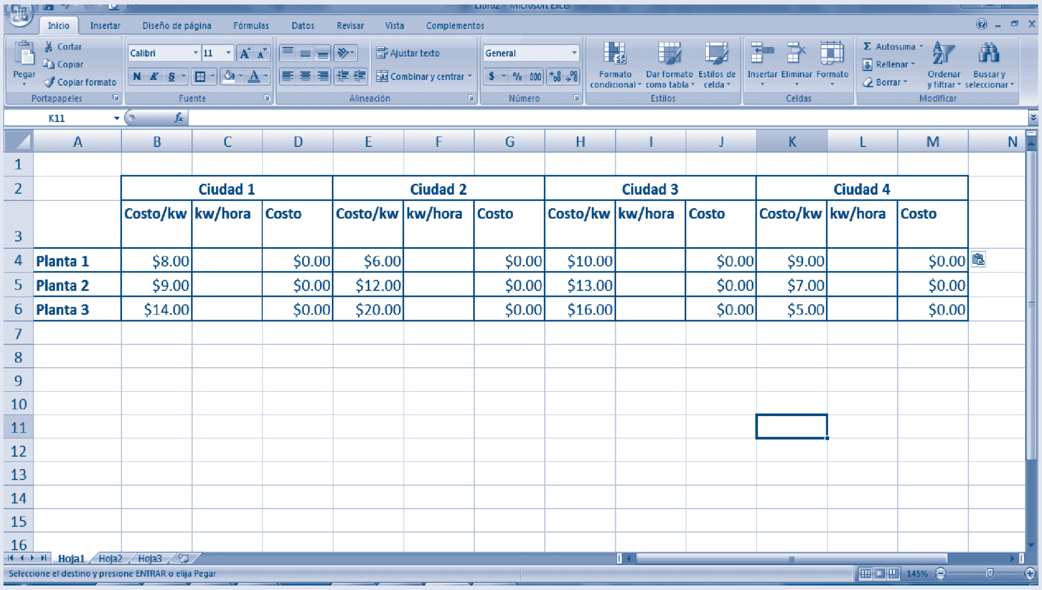
Tabla A.1

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Suministros
Planta 1	\$8.00	\$6.00	\$10.00	\$9.00	35
Planta 2	\$9.00	\$12.00	\$13.00	\$7.00	50
Planta 3	\$14.00	\$20.00	\$16.00	\$5.00	40
Demanda	45	20	30	30	

Formular un problema lineal para minimizar el costo de satisfacer la demanda de potencia pico de cada ciudad.

Solución

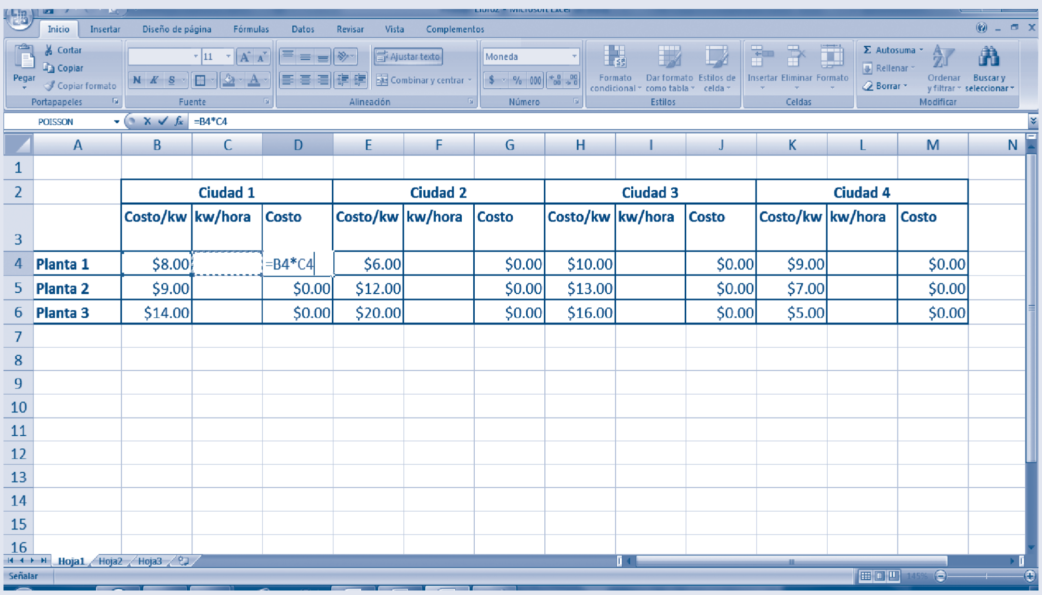
Este problema se resuelve a través del Solver de Excel, colocando celdas para las variables de decisión, como se observa en la siguiente figura.



	Ciudad 1			Ciudad 2			Ciudad 3			Ciudad 4		
	Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo
Planta 1	$8.00		$0.00	$6.00		$0.00	$10.00		$0.00	$9.00		$0.00
Planta 2	$9.00		$0.00	$12.00		$0.00	$13.00		$0.00	$7.00		$0.00
Planta 3	$14.00		$0.00	$20.00		$0.00	$16.00		$0.00	$5.00		$0.00

Figura A.15

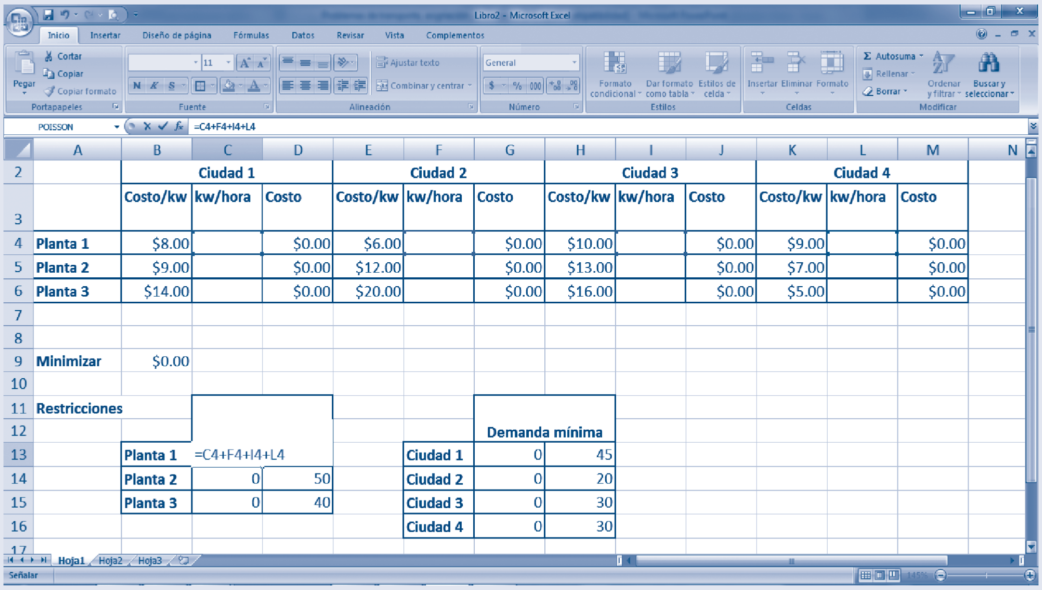
Obsérvese que las celdas B4 a B6, E4 a E6, H4 a H6 y K4 a K6 describen el costo de enviar un millón de kw/hora de la planta *i* a la ciudad *j*. En tanto, en las celdas C4 a C6, F4 a F6, I4 a I6 y L4 a L6 se encuentran las variables de decisión; por ejemplo, C4 es la cantidad de millones de kw/hora que se envía de la planta 1 a la ciudad 1, F6 es la cantidad de millones de kw/hora que se envía de la planta 3 a la ciudad 2 y así sucesivamente. Por su parte, en las celdas D4 a D6, G4 a G6, J4 a J6 y M4 a M6 se encuentran los costos que están en función del valor de las variables de decisión; por ejemplo, para obtener la celda D4 hay que efectuar la multiplicación de B4 por C4, como se aprecia en figura A.16.



	Ciudad 1			Ciudad 2			Ciudad 3			Ciudad 4		
	Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo
Planta 1	$8.00		=B4*C4	$6.00		$0.00	$10.00		$0.00	$9.00		$0.00
Planta 2	$9.00		$0.00	$12.00		$0.00	$13.00		$0.00	$7.00		$0.00
Planta 3	$14.00		$0.00	$20.00		$0.00	$16.00		$0.00	$5.00		$0.00

Figura A.16

El siguiente paso del proceso es escribir las restricciones, nótese que en la celda C13 se coloca la suma de las variables de decisión que describen lo enviado por la planta 1 a cada ciudad.

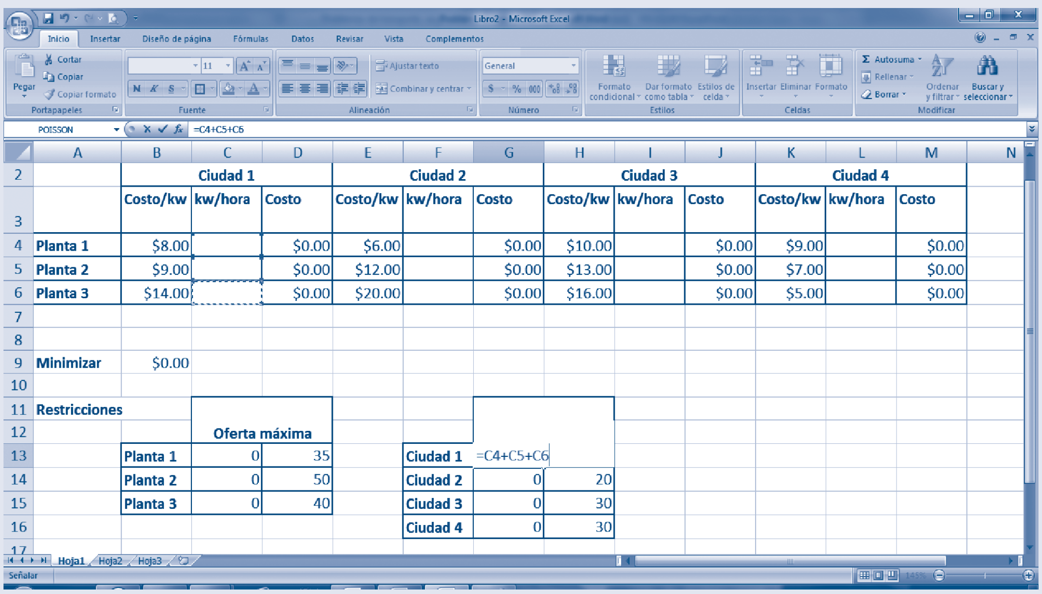


POISSON =C4+F4+I4+L4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
2		Ciudad 1			Ciudad 2			Ciudad 3			Ciudad 4		
3		Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo
4	Planta 1	$8.00		$0.00	$6.00		$0.00	$10.00		$0.00	$9.00		$0.00
5	Planta 2	$9.00		$0.00	$12.00		$0.00	$13.00		$0.00	$7.00		$0.00
6	Planta 3	$14.00		$0.00	$20.00		$0.00	$16.00		$0.00	$5.00		$0.00
7													
8													
9	Minimizar	$0.00											
10													
11	Restricciones												
12							Demanda mínima						
13		Planta 1	=C4+F4+I4+L4			Ciudad 1	0	45					
14		Planta 2	0	50		Ciudad 2	0	20					
15		Planta 3	0	40		Ciudad 3	0	30					
16						Ciudad 4	0	30					

Figura A. 17

De manera similar, la celda $G13 contiene la suma de las celdas correspondientes a las variables de decisión de los millones de kw/hora que llegan a la ciudad 1 de cada planta.

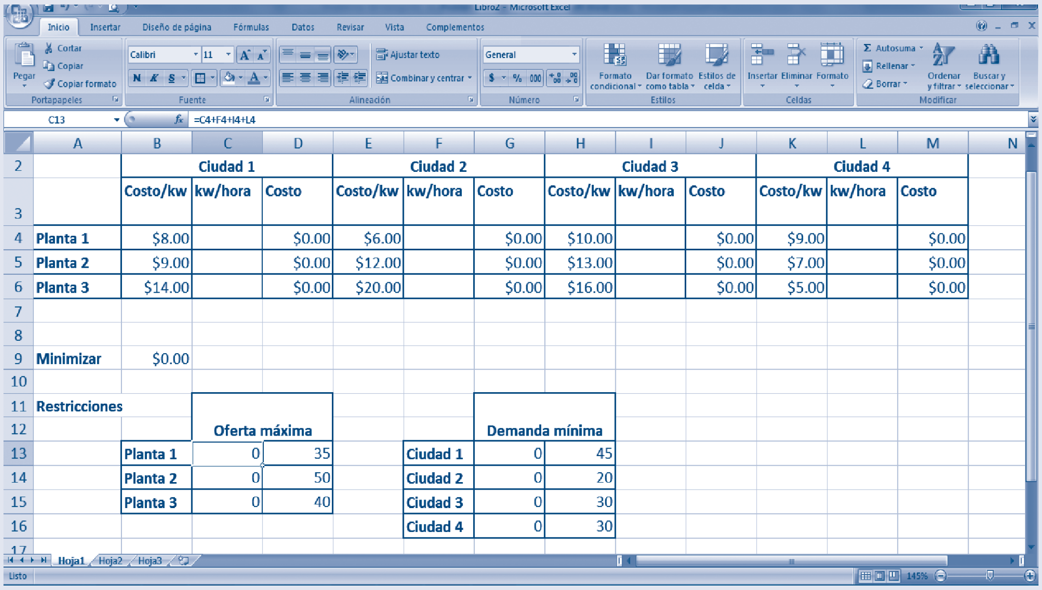


POISSON =C4+C5+C6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
2		Ciudad 1			Ciudad 2			Ciudad 3			Ciudad 4		
3		Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo
4	Planta 1	$8.00		$0.00	$6.00		$0.00	$10.00		$0.00	$9.00		$0.00
5	Planta 2	$9.00		$0.00	$12.00		$0.00	$13.00		$0.00	$7.00		$0.00
6	Planta 3	$14.00		$0.00	$20.00		$0.00	$16.00		$0.00	$5.00		$0.00
7													
8													
9	Minimizar	$0.00											
10													
11	Restricciones												
12			Oferta máxima										
13		Planta 1	0	35		Ciudad 1	=C4+C5+C6						
14		Planta 2	0	50		Ciudad 2	0	20					
15		Planta 3	0	40		Ciudad 3	0	30					
16						Ciudad 4	0	30					

Figura A.18

En las celdas D13 a $D15 se coloca la oferta máxima de cada planta. De manera similar, las celdas H13 a $H16 contienen la demanda mínima requerida por cada ciudad.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
2			Ciudad 1			Ciudad 2			Ciudad 3			Ciudad 4	
3		Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo
4	Planta 1	$8.00		$0.00	$6.00		$0.00	$10.00		$0.00	$9.00		$0.00
5	Planta 2	$9.00		$0.00	$12.00		$0.00	$13.00		$0.00	$7.00		$0.00
6	Planta 3	$14.00		$0.00	$20.00		$0.00	$16.00		$0.00	$5.00		$0.00
7													
8													
9	Minimizar	$0.00											
10													
11	Restricciones												
12			Oferta máxima				Demanda mínima						
13		Planta 1	0	35		Ciudad 1	0	45					
14		Planta 2	0	50		Ciudad 2	0	20					
15		Planta 3	0	40		Ciudad 3	0	30					
16						Ciudad 4	0	30					

Figura A. 19

Por último, se resuelve el problema, para ello es necesario ir a *Datos en el menú* y luego a la opción Solver. Al aparecer la ventana de los parámetros de Solver se coloca el valor de la celda objetivo, en este caso B9, en el valor de la celda objetivo se selecciona la opción *Mínimo* y en el campo *Cambiando las celdas* se colocan todas las que contienen a las variables de decisión.

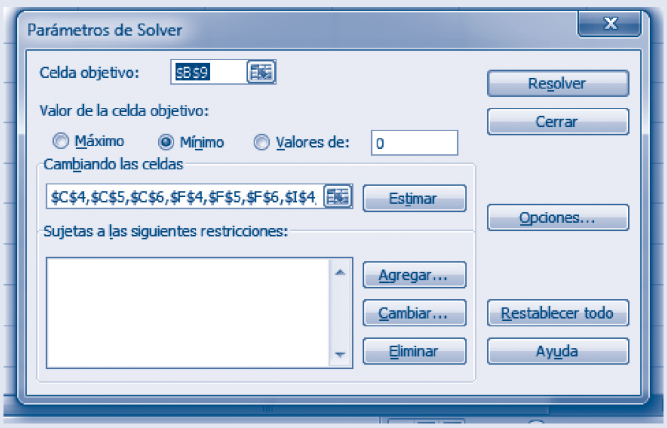


Figura A.20

Luego, se construyen las restricciones apretando el botón *Agregar*; por ejemplo, la restricción de la oferta de la planta 1 se realiza utilizando las celdas construidas con anterioridad, apretar aceptar e introducir todas las restricciones para la oferta y la demanda.

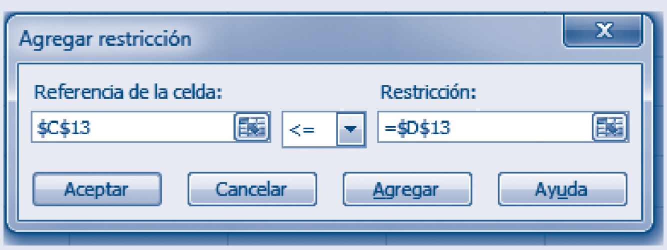


Figura A.21

Una vez que se colocan todas las restricciones, la ventana se debe ver como se aprecia en la figura A.22.

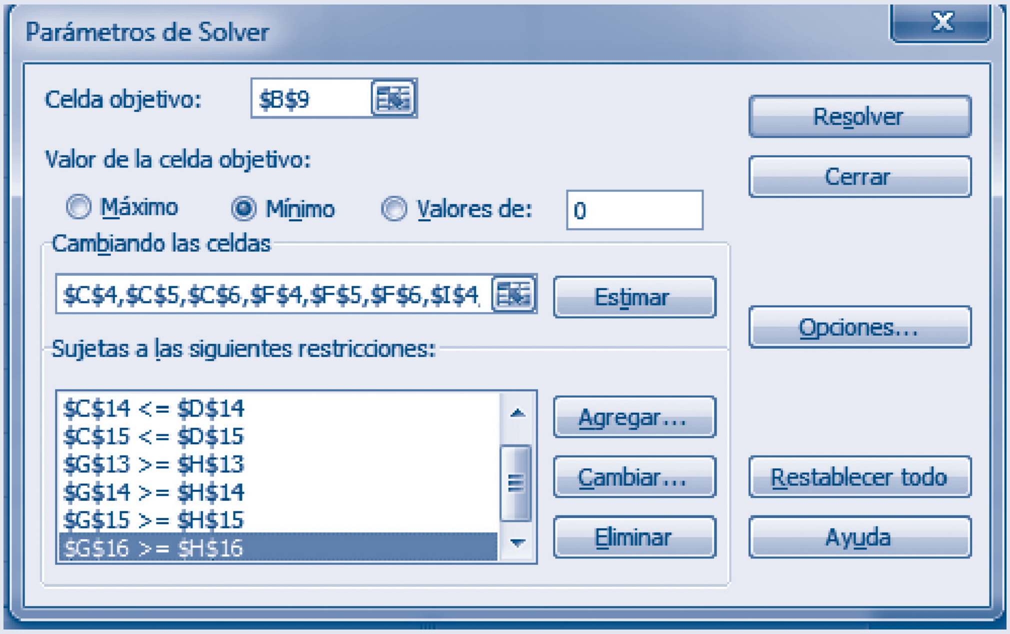
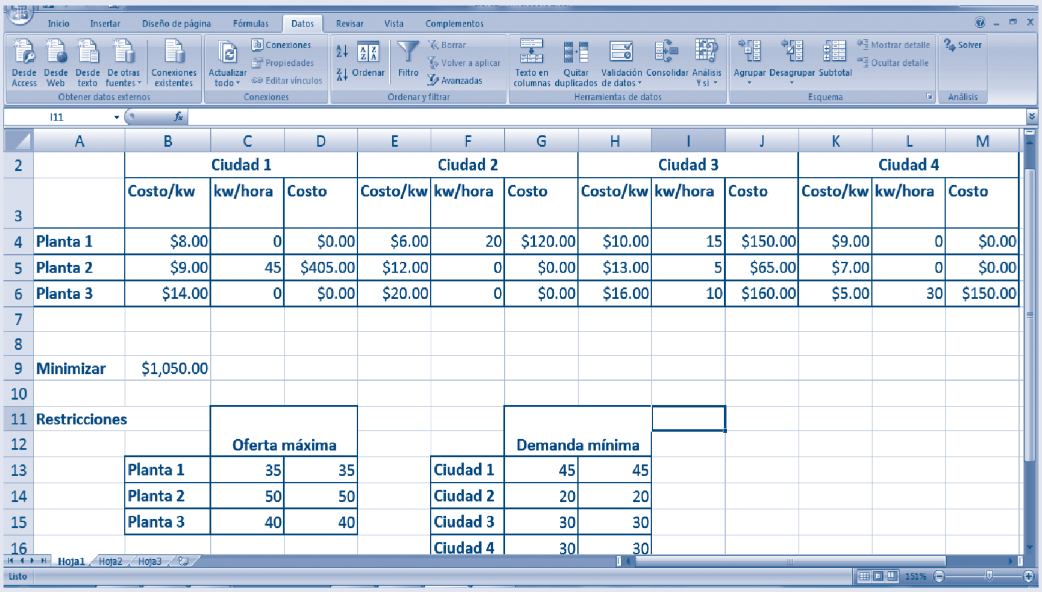


Figura A.22

Enseguida, con el botón *Opciones* se especifican las opciones: *Adoptar modelo lineal* y *Adoptar no negativos*. Por último, se selecciona el botón *Resolver*, donde se acepta el uso de la solución encontrada en Solver.

Figura A.23

La solución se muestra en la figura A.24.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
2		Ciudad 1			Ciudad 2			Ciudad 3			Ciudad 4		
3		Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo	Costo/kw	kw/hora	Costo
4	Planta 1	$8.00	0	$0.00	$6.00	20	$120.00	$10.00	15	$150.00	$9.00	0	$0.00
5	Planta 2	$9.00	45	$405.00	$12.00	0	$0.00	$13.00	5	$65.00	$7.00	0	$0.00
6	Planta 3	$14.00	0	$0.00	$20.00	0	$0.00	$16.00	10	$160.00	$5.00	30	$150.00
7													
8													
9	Minimizar	$1,050.00											
10													
11	Restricciones												
12			Oferta máxima				Demanda mínima						
13		Planta 1	35	35		Ciudad 1	45	45					
14		Planta 2	50	50		Ciudad 2	20	20					
15		Planta 3	40	40		Ciudad 3	30	30					
16						Ciudad 4	30	30					

Figura A.24

Entonces, se envían 20 millones de kw/hora de la planta 1 a la ciudad 2, con un costo de $120 y 15 millones de kw/hora de la planta 1 a la ciudad 3, con un costo de $150. En tanto, de la planta 2 a la ciudad 1 se envían 45 millones kw/hora con un costo de $405, 5 kw/hora de la planta 2 a la ciudad 3, con un costo de $65. Por último, de la planta 3 a la ciudad 3 se envían 10 millones de kw/hora con un costo de $160; y a la ciudad 4, 30 con un costo de $150. Como se puede ver, el costo mínimo es de $1 050 y las restricciones se cumplen.

Problema de asignación

A continuación se presenta un problema resuelto de asignación.

Problema resuelto

Cinco empleados llevan a cabo cuatro tareas. El tiempo que toma a cada persona realizar cada tarea en horas se muestra en la tabla A.2. Determinar la asignación de empleados a las tareas que reduce el tiempo total requerido para efectuar las cuatro tareas.

Tabla A.2

	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
Persona 1	22	18	30	18
Persona 2	18		27	22
Persona 3	26	20	28	28
Persona 4	16	22		14
Persona 5	21		25	28

Solución

A continuación se describe paso a paso la solución a través del Solver de Excel.

Así, primero se escribe el problema, colocando celdas para las variables de decisión. Obsérvese que la persona 2 no puede hacer la tarea 2, por lo que se coloca un valor muy grande en estas celdas, con la finalidad de que no sean consideradas cuando se minimice el tiempo total.

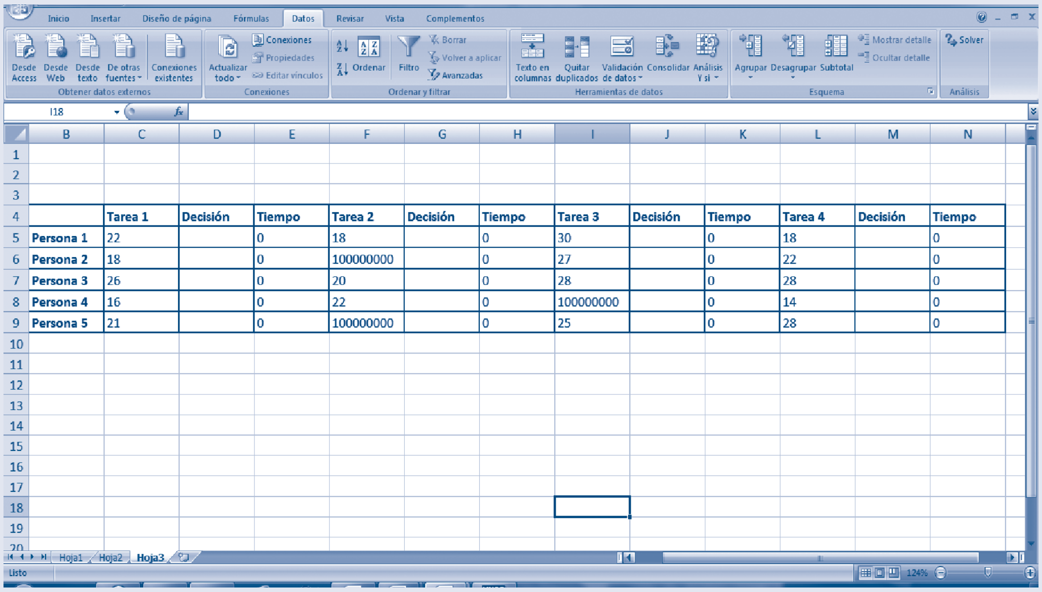


Figura A.25

En este caso, las celdas C5 a C9, F5 a F9, I5 a I9 y L5 a L9 se refieren al tiempo en horas que ser tarda la persona *i* en realizar la tarea *j*. Mientras que en las celdas $$D$5 a D9, G5 a G9, J5 a J9 y M5 a M9 se encuentran las variables de decisión; por ejemplo, G8 es una variable binaria que será **1** si la persona 4 realiza la tarea 2 y **0** si no es asignada a esta actividad; M6 será **1** si la persona 2 realiza la tarea 4 y **0** en el caso contrario, y así sucesivamente. En cuanto a las celdas E5 a E9, H5 a H9, K5 a K9 y N5 a N9, en estas se encuentra el tiempo que está en función del valor de las variables de decisión; por ejemplo, para obtener la celda H5 es necesario efectuar la multiplicación de F5 por G5 como se aprecia en la figura A.26.

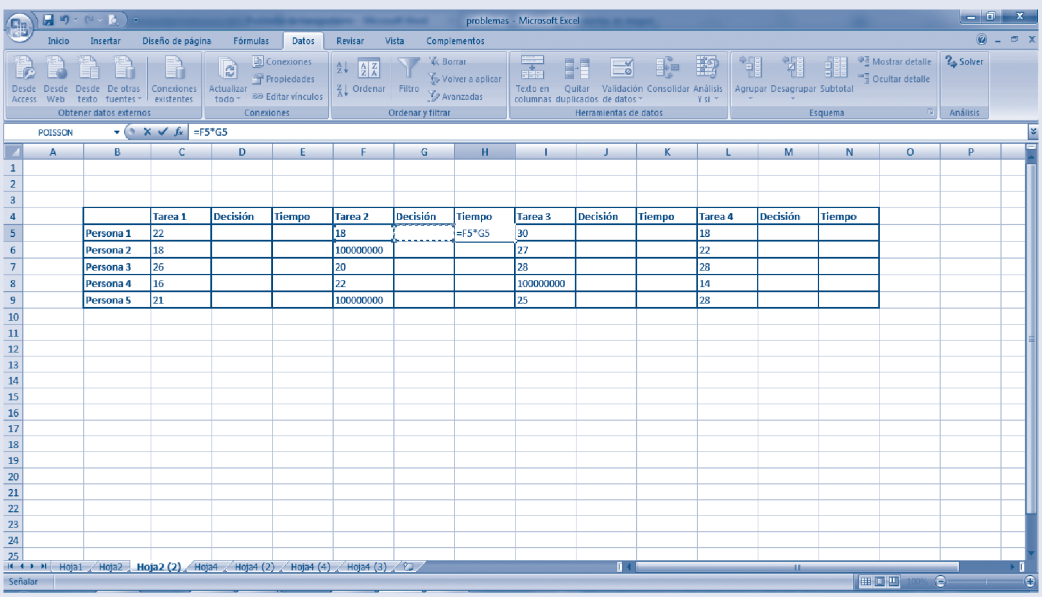
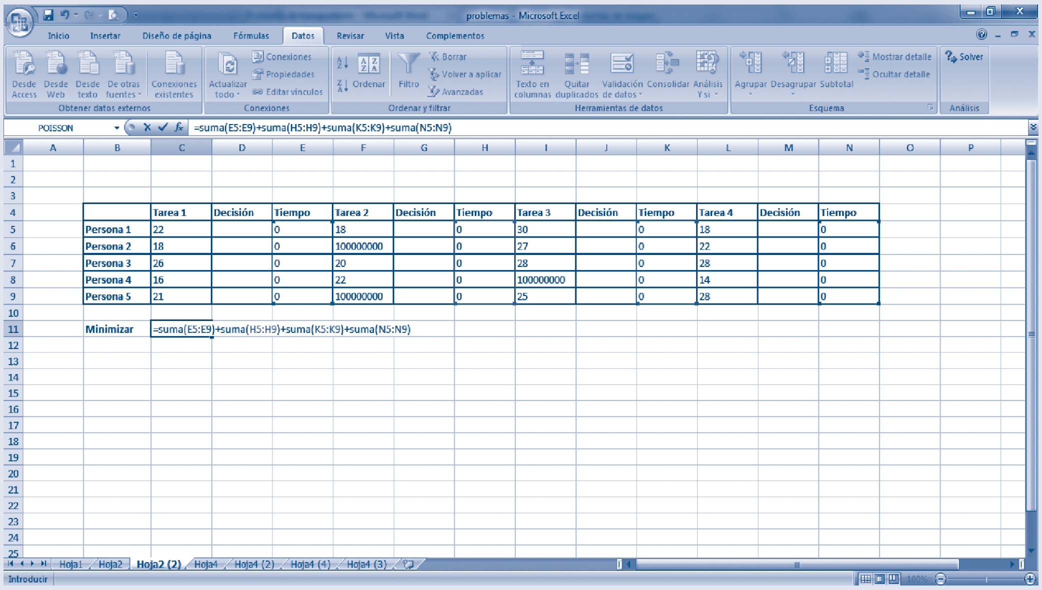


Figura A.26

Posteriormente, se establece la función objetivo. Obsérvese que en este problema se requiere minimizar el tiempo total de duración de las tareas, lo que se especifica en Excel sumando el contenido de todas las celdas de tiempo; en este caso, por practicidad, se ha hecho a través de la función *suma*.

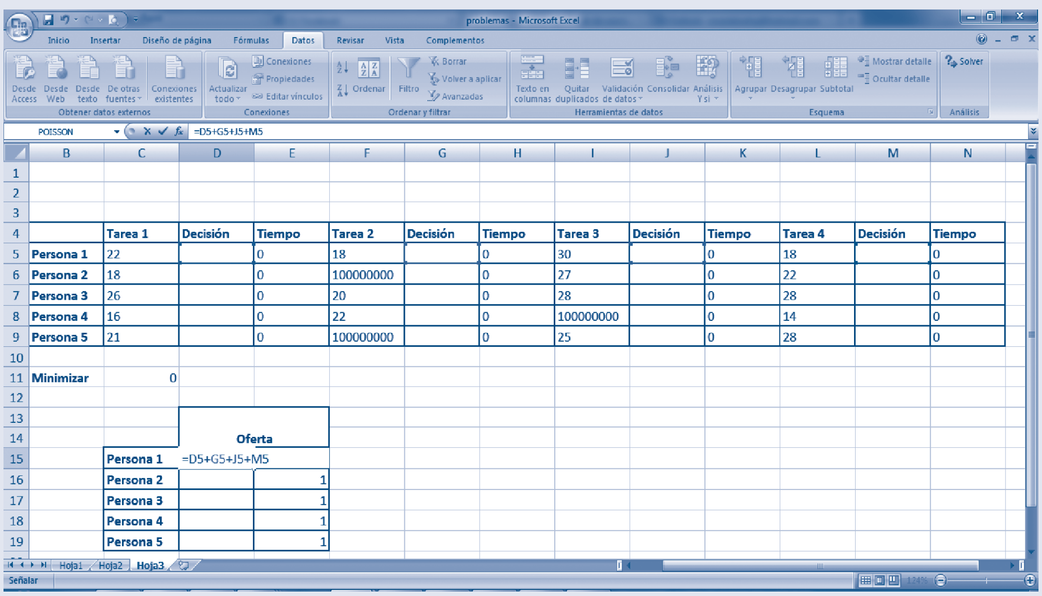


=suma(E5:E9)+suma(H5:H9)+suma(K5:K9)+suma(N5:N9)

	Tarea 1	Decisión	Tiempo	Tarea 2	Decisión	Tiempo	Tarea 3	Decisión	Tiempo	Tarea 4	Decisión	Tiempo
Persona 1	22		0	18		0	30		0	18		0
Persona 2	18		0	100000000		0	27		0	22		0
Persona 3	26		0	20		0	28		0	28		0
Persona 4	16		0	22		0	100000000		0	14		0
Persona 5	21		0	100000000		0	25		0	28		0
Minimizar	=suma(E5:E9)+suma(H5:H9)+suma(K5:K9)+suma(N5:N9)											

Figura A.27

A continuación, se detallan las restricciones; nótese que en la celda D15 se coloca la suma de las variables de decisión que describen la realización de cada una de las tareas realizadas por la persona 1. En la celda E15 se coloca el **1**, puesto que la persona 1 solo puede realizar una sola tarea (solo una variable de decisión puede ser igual a **1,** las otras serán igual a **0).**



=D5+G5+J5+M5

	Tarea 1	Decisión	Tiempo	Tarea 2	Decisión	Tiempo	Tarea 3	Decisión	Tiempo	Tarea 4	Decisión	Tiempo
Persona 1	22		0	18		0	30		0	18		0
Persona 2	18		0	100000000		0	27		0	22		0
Persona 3	26		0	20		0	28		0	28		0
Persona 4	16		0	22		0	100000000		0	14		0
Persona 5	21		0	100000000		0	25		0	28		0
Minimizar	0											

	Oferta	
Persona 1	=D5+G5+J5+M5	
Persona 2		1
Persona 3		1
Persona 4		1
Persona 5		1

Figura A.28

De manera similar, la celda $H15 contiene la suma de las celdas correspondientes a las variables de decisión de todas las personas (personas 1 a 5) que pueden realizar la tarea 1. La celda I15 es igual a **1** porque la tarea 1 será hecha solo por una persona.

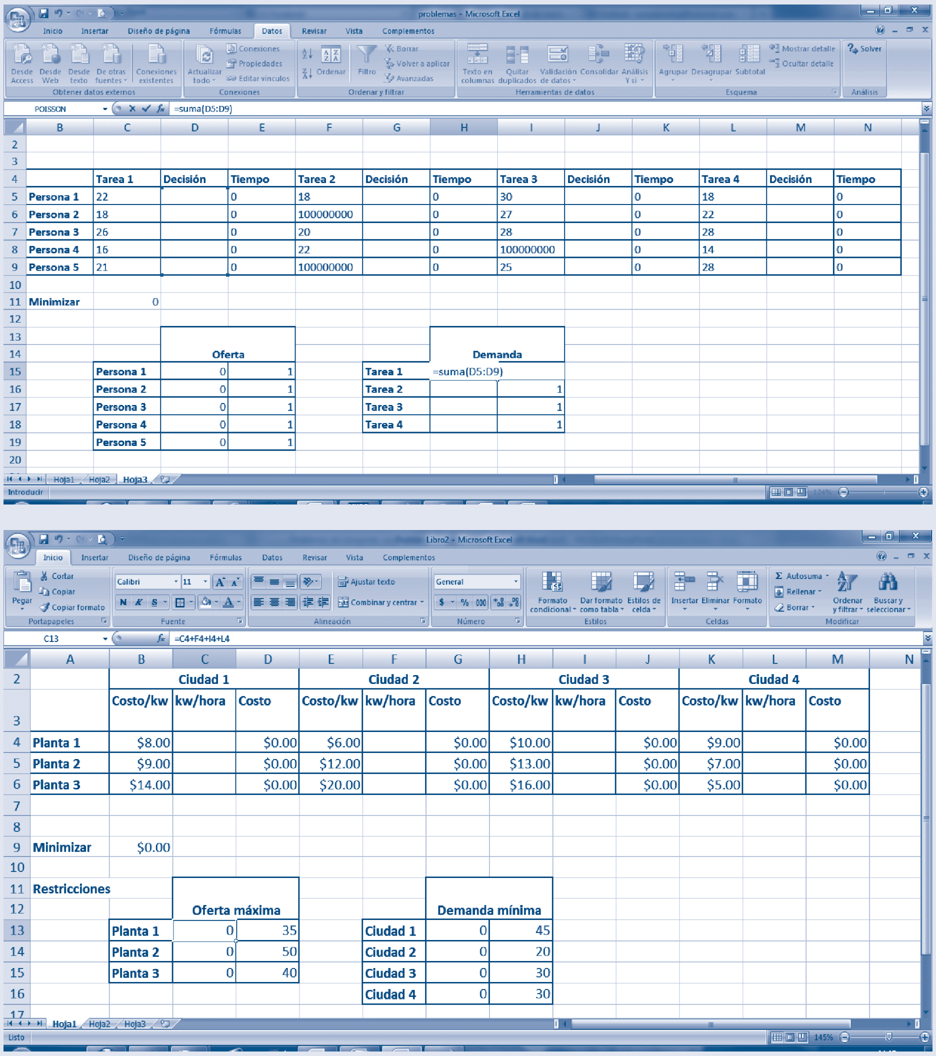


Figura A.29

Una vez construidas las restricciones, se resuelve el problema. Primero, se deberá ir a la opción *Datos* en el menú y luego a la opción *Solver.* Al aparecerla ventana de los parámetros de Solver, se coloca el valor de la celda objetivo; en este caso, C11, en el valor de la celda objetivo se selecciona la opción *Mínimo;* y en el campo *Cambiando las celdas* se colocan todas las celdas que contienen a las variables de decisión, nótese que esta vez se han puesto en intervalos que corresponden a cada tarea, separados por comas.

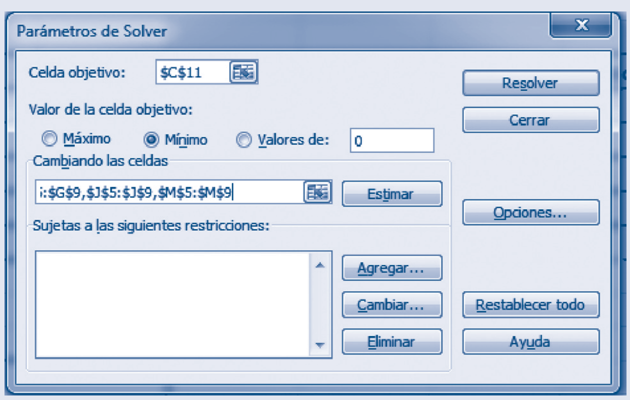


Figura A.30

Luego, se construyen las restricciones a través del botón *Agregar;* por ejemplo, la restricción de la oferta de la persona 1 se realiza utilizando las celdas construidas con anterioridad, se selecciona *Agregar*, se introducen todas las restricciones para la oferta y la demanda, y por último se selecciona *Aceptar*.

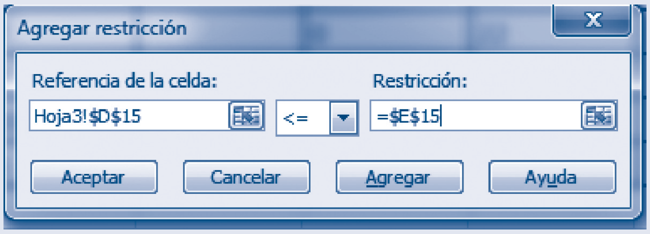


Figura A.31

Una vez colocadas todas las restricciones, la ventana se debe ver como se aprecia en la figura A.32.

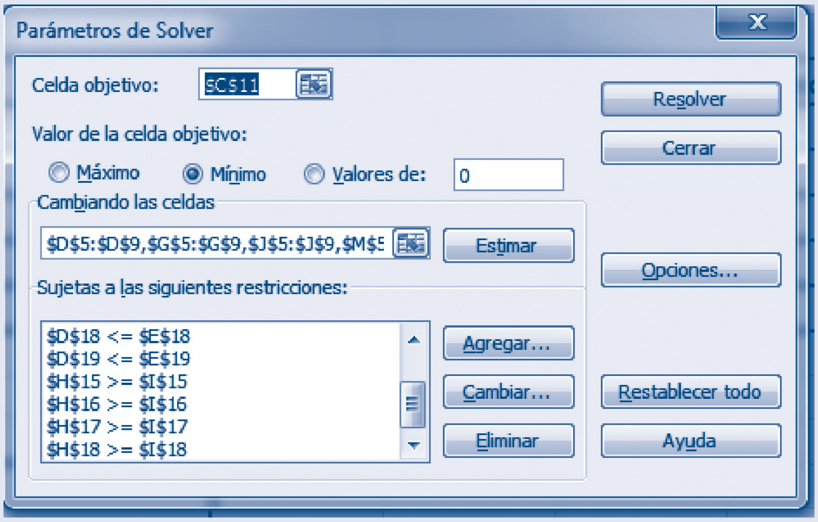
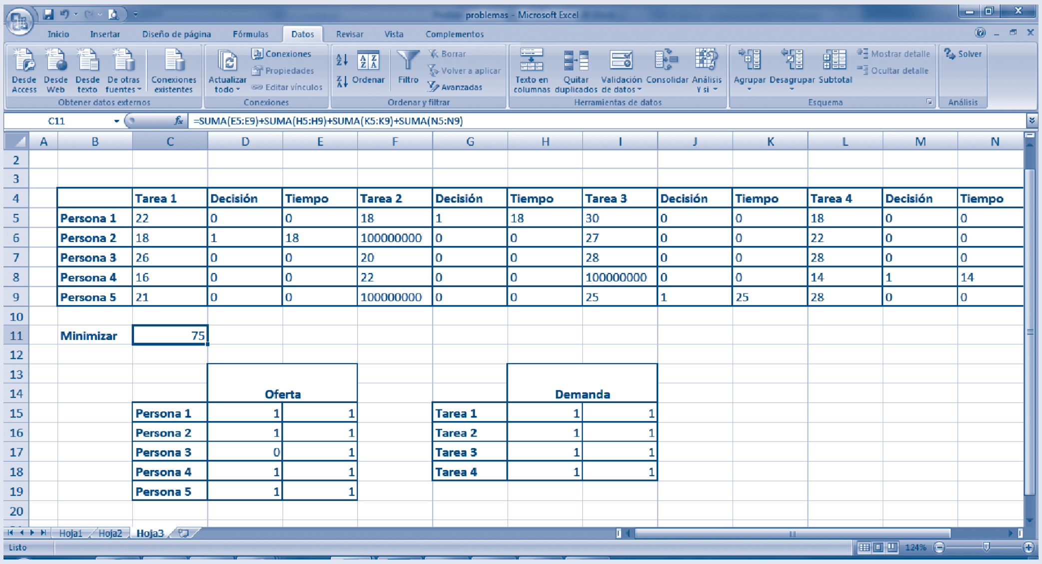


Figura A.32

Con el botón *Opciones*, se especifica la opción a seguir: *Adoptar modelo lineal* y *Adoptar no negativos*. Por último, se selecciona el botón *Resolver*, mediante el cual se acepta el uso de la solución encontrada en el Solver.

Figura A.33

La solución se muestra en la figura A.34.



C11 =SUMA(E5:E9)+SUMA(H5:H9)+SUMA(K5:K9)+SUMA(N5:N9)

	Tarea 1	Decisión	Tiempo	Tarea 2	Decisión	Tiempo	Tarea 3	Decisión	Tiempo	Tarea 4	Decisión	Tiempo
Persona 1	22	0	0	18	1	18	30	0	0	18	0	0
Persona 2	18	1	18	100000000	0	0	27	0	0	22	0	0
Persona 3	26	0	0	20	0	0	28	0	0	28	0	0
Persona 4	16	0	0	22	0	0	100000000	0	0	14	1	14
Persona 5	21	0	0	100000000	0	0	25	1	25	28	0	0

Minimizar 75

	Oferta	
Persona 1	1	1
Persona 2	1	1
Persona 3	0	1
Persona 4	1	1
Persona 5	1	1

	Demanda	
Tarea 1	1	1
Tarea 2	1	1
Tarea 3	1	1
Tarea 4	1	1

Figura A.34

Como puede observarse en la figura, en la celda G5, la persona 1 realiza la tarea 2 la persona 2 realiza la tarea 1 (véase D6), la persona 3 no realiza ninguna tarea, la persona 4 realiza la tarea 4 (véase M8) y la persona 5 efectúa la tarea 3 (véase J9). Véase que el costo mínimo es de $75 y que las restricciones se cumplen.

Problema de transbordo

Problema resuelto

Supóngase que se fabricará un mismo producto nuevo en dos plantas distintas y que será necesario enviarlo a dos almacenes de distribución, donde cualquiera de las dos plantas podrá abastecer a los dos almacenes. La red de distribución disponible se muestra en la figura A.35. La decisión que deberá tomarse se refiere a cuánto enviar a través de cada canal de distribución para minimizar el costo total de envío.

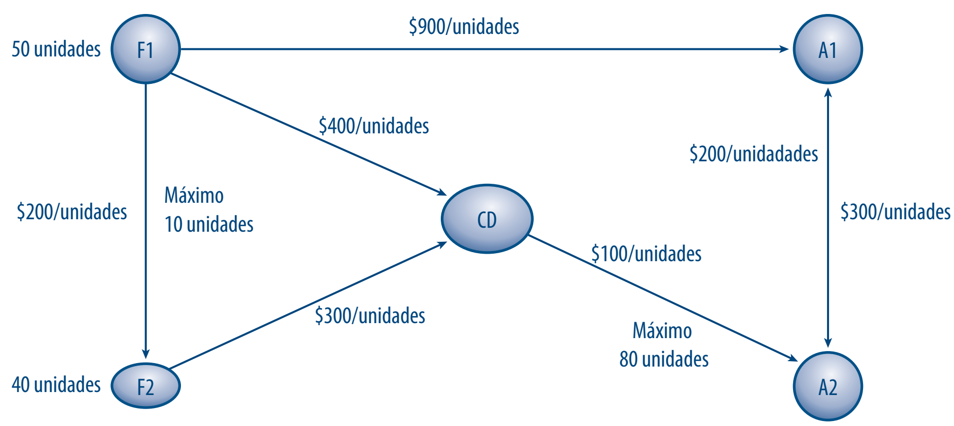
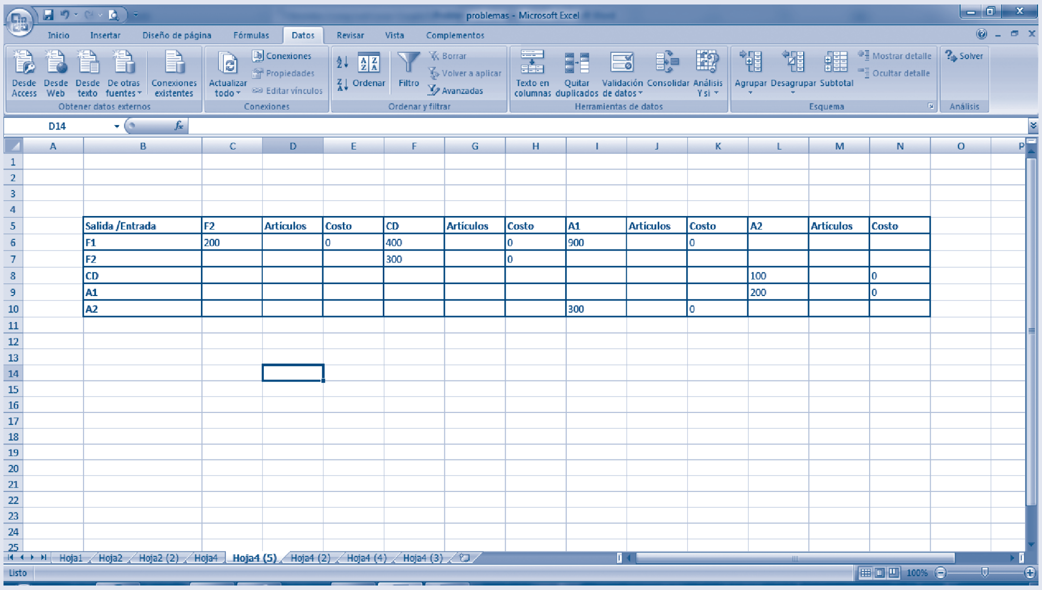


Figura A.35

Solución

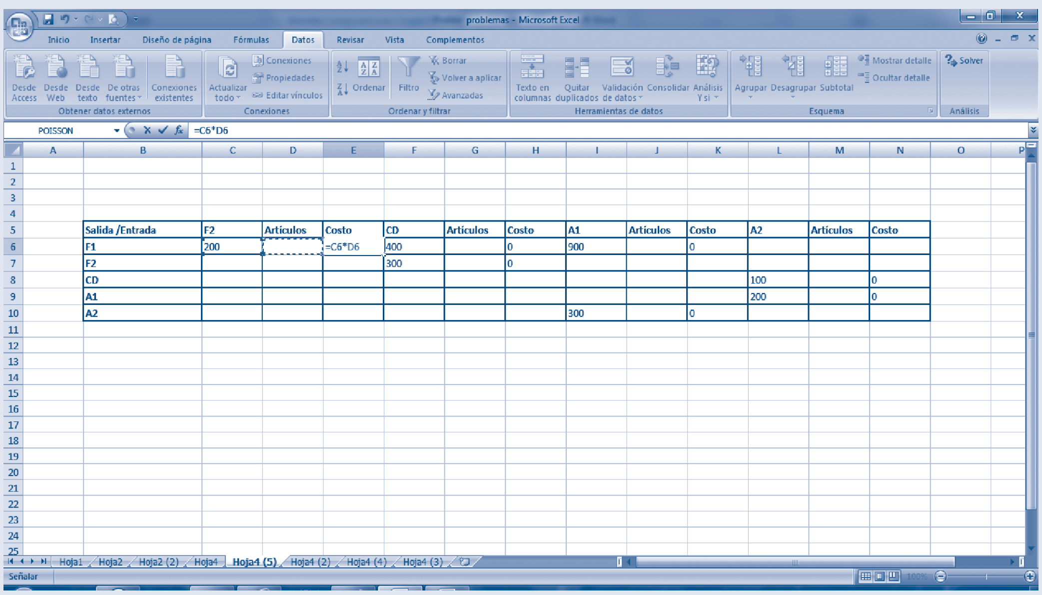
Este problema puede resolverse a través del Solver de Excel. Pare ello, primero se escribe el problema colocando celdas para las variables de decisión (véase figura A.36).



Salida /Entrada	F2	Articulos	Costo	CD	Articulos	Costo	A1	Articulos	Costo	A2	Articulos	Costo
F1	200		0	400		0	900		0			
F2				300		0						
CD										100		0
A1										200		0
A2							300		0			

Figura A.36

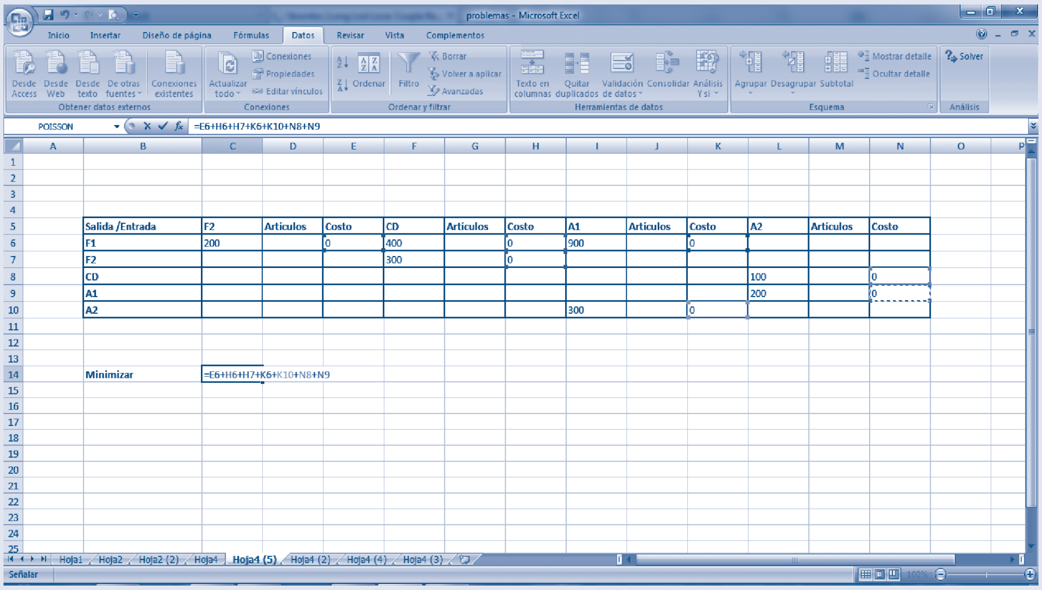
Obsérvese que en las filas se han colocado los nodos de salida (oferta) y en las columnas los nodos de entrada (demanda). Las celdas \$C\$6, \$F\$6, \$F\$7, \$I\$6, \$I\$10, \$L\$8 y \$L\$9 contienen el costo por mover un artículo del nodo *i* al nodo *j*. En tanto, en las celdas \$D\$6, \$G\$6, \$G\$7, \$J\$6, \$J\$10, \$M\$8 y \$M\$9 se especifican las variables de decisión; por ejemplo, \$D\$6 es el número de artículos que se envían de la fábrica 1 (F1) a la fábrica 2 (F2); \$J\$10 es el número de artículos que se envían del almacén 2 (A2) al almacén 1 (A1) y así sucesivamente. En las celdas \$E\$6, \$H\$6, \$H\$7, \$K\$6, \$K\$10, \$N\$8 y \$N\$9 se ubica el costo que está en función del valor de las variables de decisión; por ejemplo, para obtener la celda \$E\$6 es necesario efectuar la multiplicación de \$C\$6 por \$D\$6, como se aprecia en la figura A.37.



Salida /Entrada	F2	Articulos	Costo	CD	Articulos	Costo	A1	Articulos	Costo	A2	Articulos	Costo
F1	200		=C6*D6	400		0	900		0			
F2				300		0						
CD										100		0
A1										200		0
A2							300		0			

Figura A.37

Posteriormente, se establece la función objetivo. Una vez que se obtienen todos los costos, estos se suman, como se aprecia en la figura A.37. Nótese que en este problema se requiere minimizar el costo total de enviar los artículos de los nodos fuente a los nodos demanda.

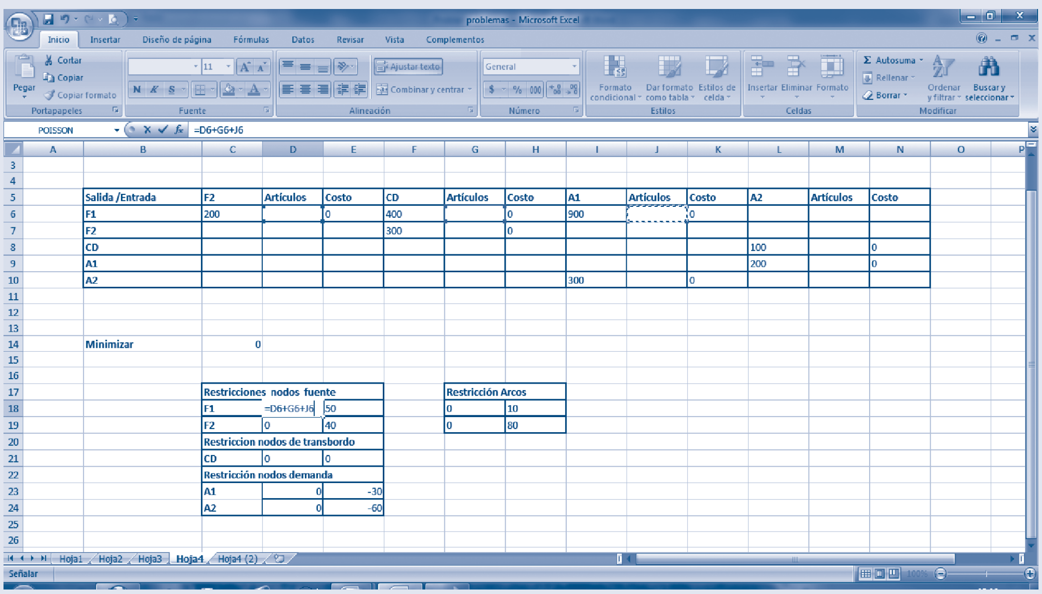


Salida /Entrada	F2	Articulos	Costo	CD	Articulos	Costo	A1	Articulos	Costo	A2	Articulos	Costo
F1	200		0	400		0	900		0			
F2				300		0						
CD										100		0
A1										200		0
A2							300		0			

Minimizar =E6+H6+H7+K6+K10+N8+N9

Figura A.38

Luego, se formulan las restricciones; es necesario construir una para cada nodo. Para el lado derecho de las restricciones, E18 y E19 contienen la máxima oferta de los nodos fuente (en este caso: F1 y F2), obsérvese que estas cantidades son positivas; el nodo transbordo siempre debe ser cero (E21) y la mínima demanda se coloca en las celdas E23 y E24 en negativo. Para el lado izquierdo, es imprescindible recordar el principio que rige la construcción de las restricciones del problema de transbordo: todo sale, excepto lo que entra para cada nodo. Así, si hablamos del nodo F1, este solo tiene salidas y ninguna entrada, por lo que únicamente deben sumarse D6, G6 y J6; el nodo F1 solo tiene fila y no columnas. El nodo F2 ya tiene salidas (fila 7:G7) y entradas (columna D: D6), por lo que se efectúa la operación de G7- D6.



Salida /Entrada	F2	Artículos	Costo	CD	Artículos	Costo	A1	Artículos	Costo	A2	Artículos	Costo
F1	200		0	400		0	900		0			
F2				300		0						
CD										100		0
A1										200		0
A2							300		0			

Minimizar 0

Restricciones nodos fuente		
F1	=D6+G6+J6	50
F2	0	40
Restriccion nodos de transbordo		
CD	0	0
Restricción nodos demanda		
A1	0	-30
A2	0	-60

Restricción Arcos	
0	10
0	80

Figura A.39

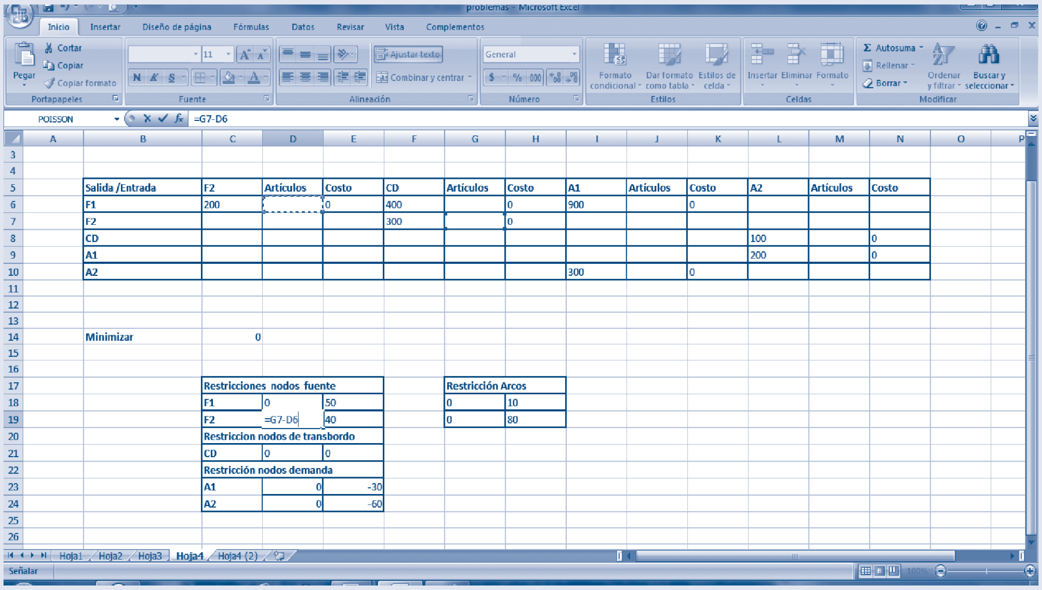


Figura A.40

Enseguida, se construyen las restricciones del nodo transbordo y los nodos demanda de manera similar; para la restricción de los arcos se coloca la máxima capacidad en las celdas H18 y H19, así como en las celdas I18 y I19 se iguala con la celda que contiene el número de artículos que pasan por dicho arco. Por ejemplo, de F1 a F2 solo pueden enviarse 10 unidades.

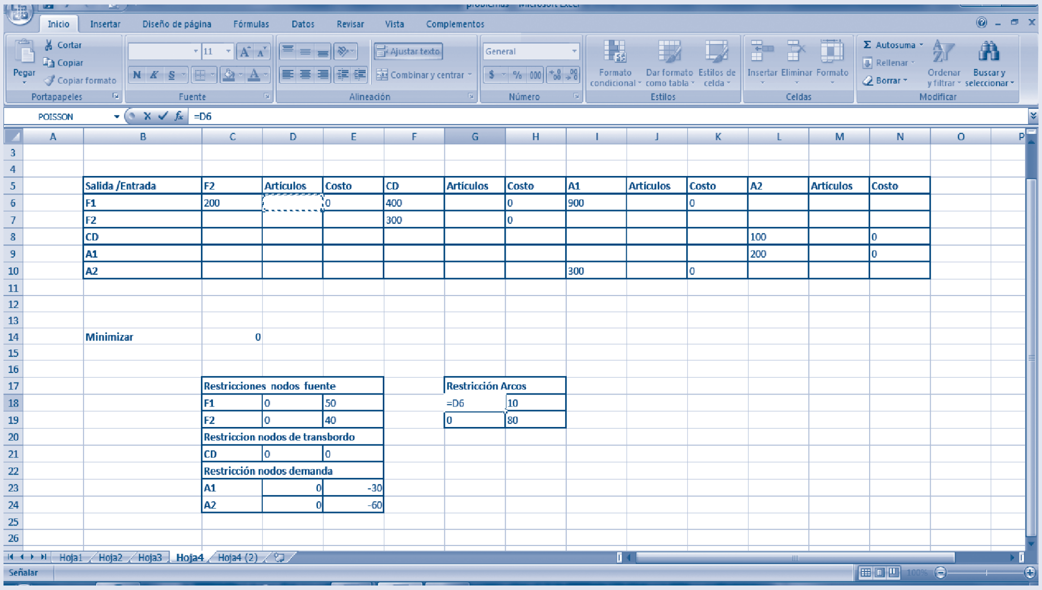


Figura A.41

El problema se resuelve al ir a *Datos* en el Menú y luego a la opción *Solver*. Al aparecerla ventana de los parámetros de Solver, se coloca el valor de la celda objetivo, en este caso C14, en el valor de la celda objetivo, se selecciona la opción *Mínimo;* y en el campo *Cambiando las celdas* se colocan todas las celdas que contienen a las variables de decisión separadas por comas.

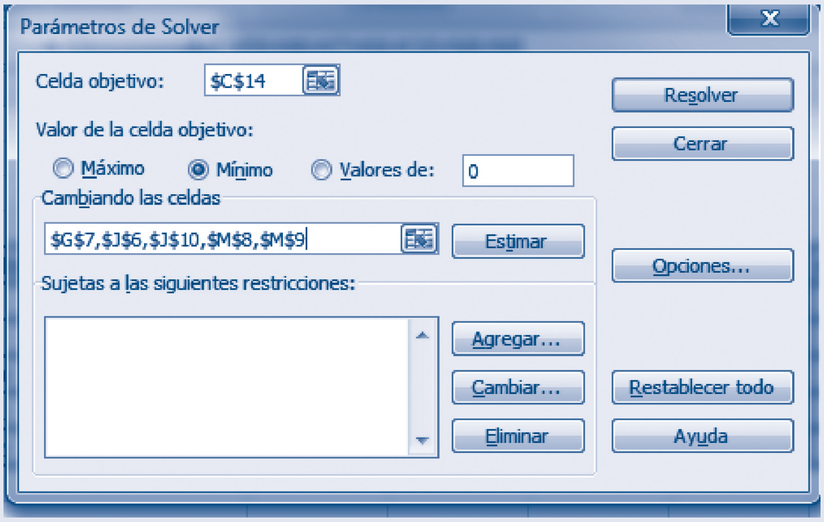


Figura A.42

Acto seguido, se construyen las restricciones a través del botón *Agregar;* por ejemplo, la restricción del nodo F1 se realiza utilizando las celdas construidas antes. Luego, se selecciona *Agregar* y se introducen todas las restricciones para cada nodo, al final se oprime la opción *Aceptar.*

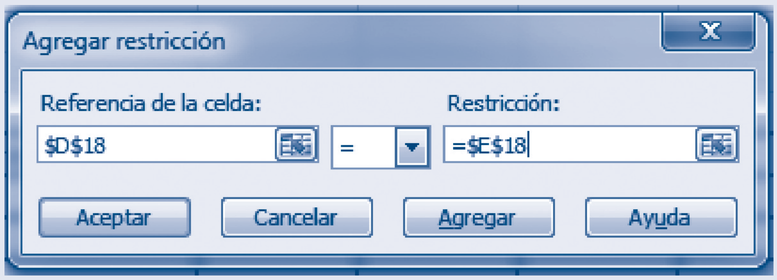


Figura A.43

Una vez colocadas todas, la ventana se debe ver como se muestra en la figura A.44.

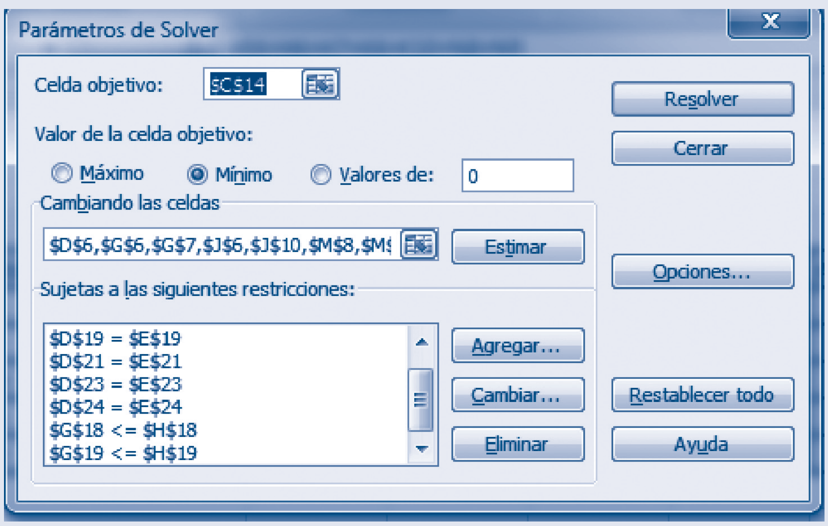


Figura A.44

Con el botón *Opciones* se especifica *Adoptar modelo lineal* y *Adoptar no negativos*. Por último, se selecciona el botón *Resolver*, mediante el cual se acepta el uso de la solución encontrada en el Solver.

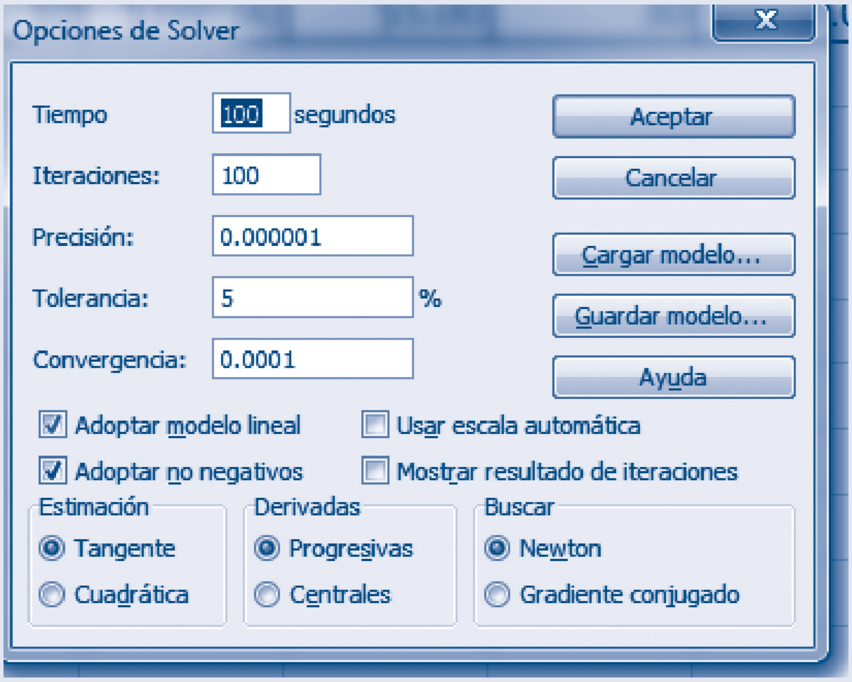


Figura A.45

La solución se muestra en la figura A.46.

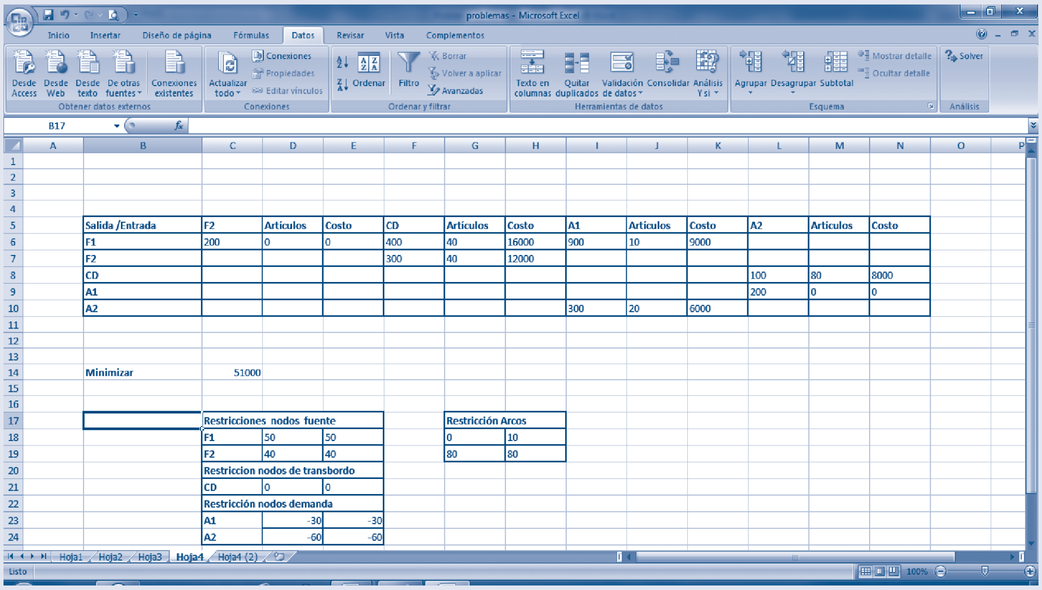


Figura A.46

Así, se sabe que de F1 a A1 se envían 10 artículos (J6); F1 también envía 40 artículos al CD (G6); F2 envía 40 artículos al CD (G7); el CD envía 80 artículos al A2 (M8) y este a su vez 20 a A1 (J10). Todas las restricciones se cumplen con un costo de $51 000.00.

Problema de ruta más corta

Problema resuelto

En fechas recientes se reservó un área para paseos y campamentos. En esta no se permite la entrada de automóviles, aunque existe un sistema de caminos angostos con curvas para tranvías y jeeps conducidos por los guardabosques. La figura A.47 muestra este sistema de caminos sin las curvas, en donde 0 es la entrada al parque y los otros números representan la localización de las casetas de los guardabosques (y otras instalaciones del servicio). Los números son las distancias en kilómetros de estos caminos sinuosos.

El parque tiene un mirador, desde el que se aprecia un hermoso paisaje en la estación 6. Unos cuantos tranvías transportan a los visitantes desde la estación 6 y de regreso. Determinar qué ruta, desde la entrada del parque a la estación 6, es la que tiene la distancia total más corta para la operación de los tranvías.

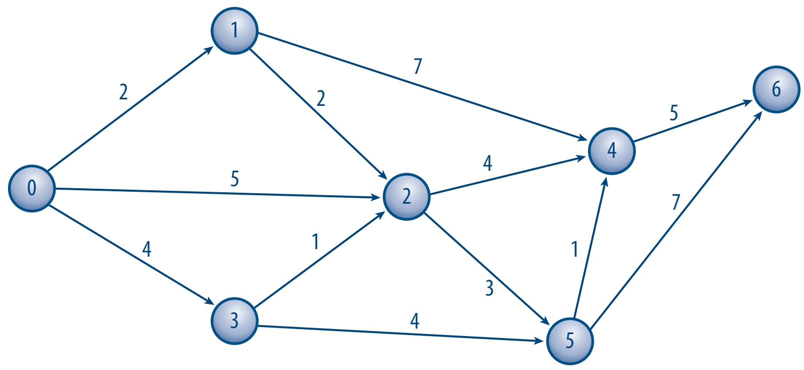
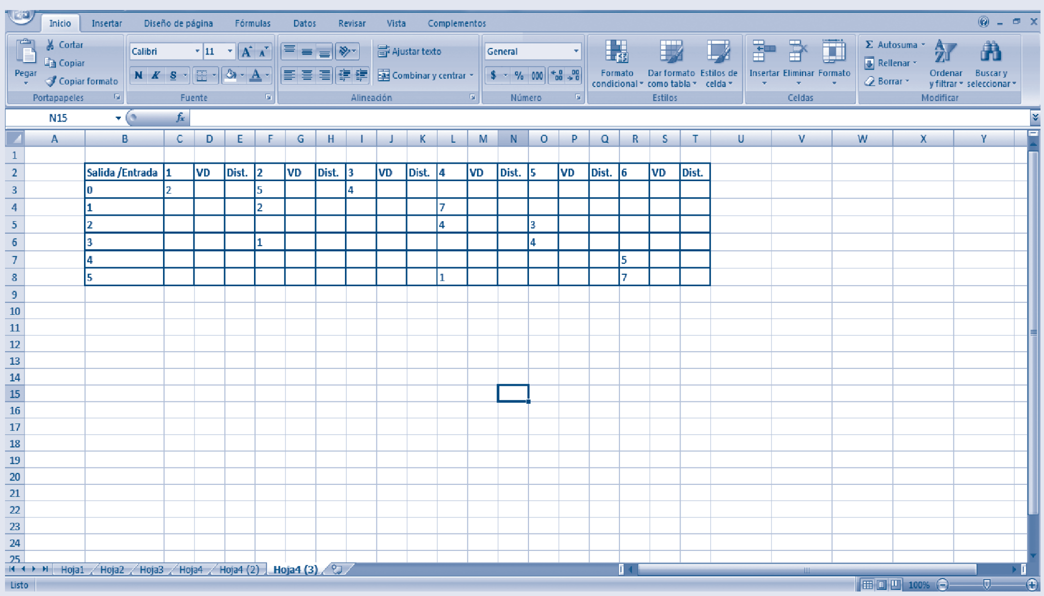


Figura A.47

Este problema será resuelto como uno de transbordo, considerando que el **0** es el **nodo** fuente y el **6** el **nodo** demanda y todos los demás son nodos de transbordo. Las variables de decisión serán **1** si la persona utiliza la el arco, **0** en caso contrario.

Solución

Se escribe el problema en Excel, colocando celdas para las variables de decisión.



Salida /Entrada	1	VD	Dist.	2	VD	Dist.	3	VD	Dist.	4	VD	Dist.	5	VD	Dist.	6	VD	Dist.
0	2			5			4											
1				2						7								
2										4			3					
3				1									4					
4																5		
5										1						7		

Figura A.48

En las filas se han colocado los nodos de salida y en las columnas los nodos de entrada. Las celdas C3, F3, F4, F6, I3, L4, L5, L8, O5, O6, R7 y R8 contienen la distancia en kilómetros del nodo *i* al nodo *j*. En las celdas D3, G3, G4, G6, J3, M4, M5, M8, P5, P6, S7 y S8 se encuentran las variables de decisión; por ejemplo, D3 es una variable binaria que toma el valor de **1** si se toma la ruta del nodo 0 al nodo 1, y **0** en caso contrario. De igual forma,M5 es **1** si se toma la ruta del nodo 2 al nodo 4 y así sucesivamente. En las celdas E3, H3, H4, H6, K3, N4, N5, N8, Q5, Q6, T7 y T8 se calcula la distancia que está en función del valor de las variables de decisión; por ejemplo, para obtener la celda E3 es necesario efectuar la multiplicación de C3 por D3, como se aprecia en la figura A.49.

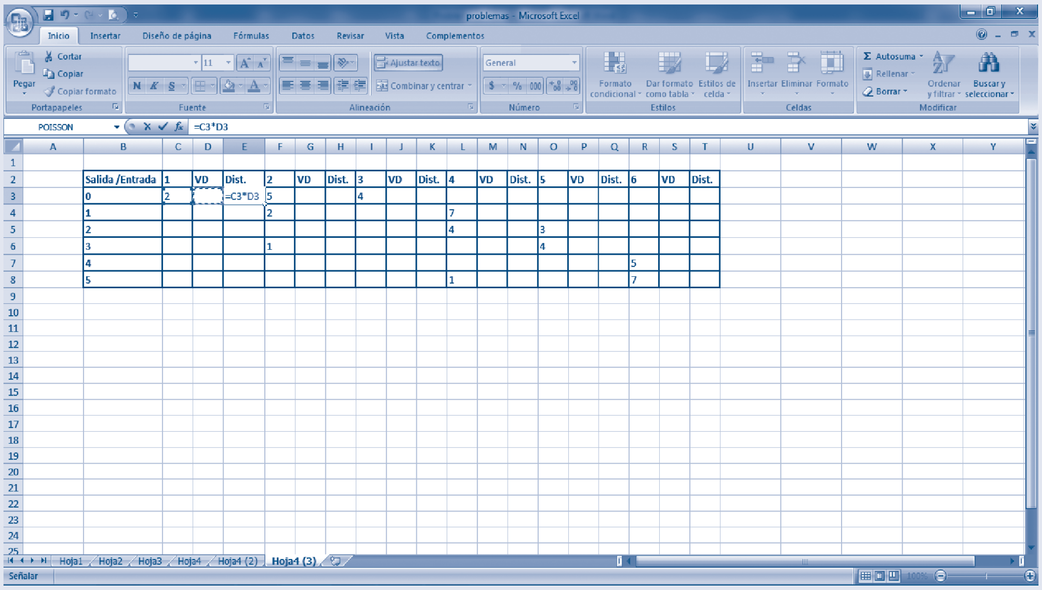


Figura A.49

Posteriormente, se suman todos los costos después de haberlos calculado, como se explicó en el paso anterior, con la finalidad de construir la función objetivo. Nótese que en este problema se requiere minimizar la distancia total.

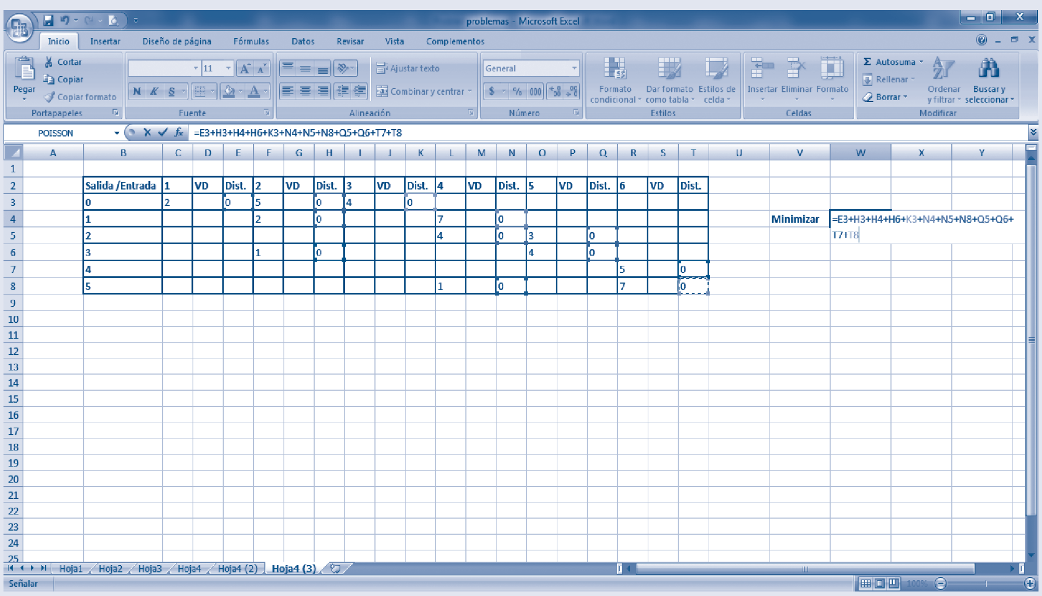
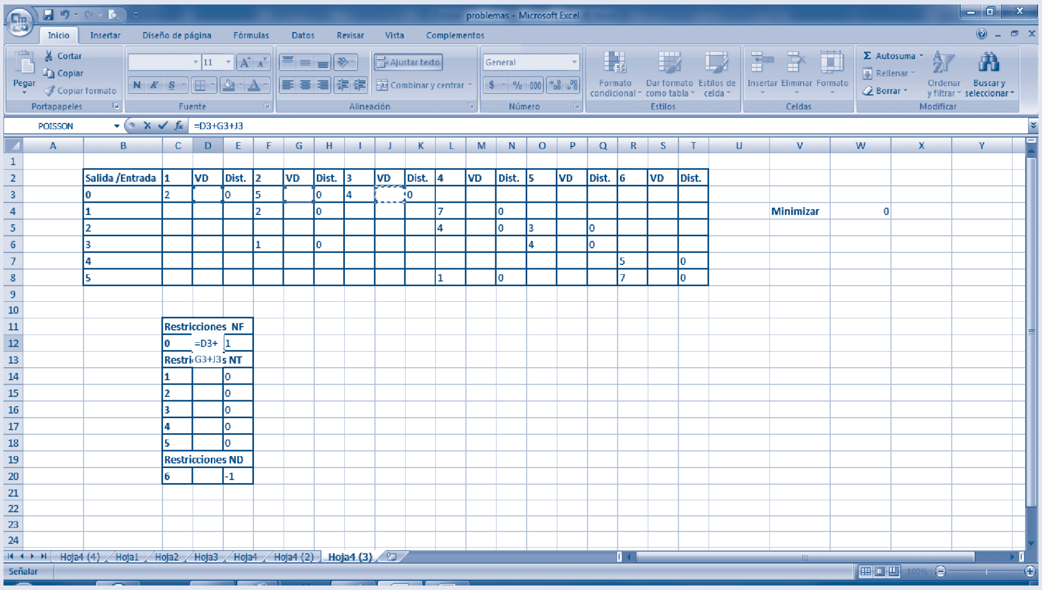


Figura A.50

Como se dijo antes, es necesario construir una restricción para cada nodo; para el lado derecho de las restricciones, E12 contiene la máxima oferta del nodo fuente, en este caso al ser una variable binaria es **1**; para los nodos de transbordo siempre debe ser cero (E14 a E18) y la mínima demanda se coloca en las celda E20 en negativo. Para el lado izquierdo, es necesario recordar el principio utilizado en el problema anterior y que rige la construcción de las restricciones del problema de transbordo, todo sale, excepto lo que entra para cada nodo; el nodo 0 solo tiene salidas y ninguna entrada, por lo únicamente deben sumarse D3, G3 y J3; el nodo 0 solo tiene filas y no columnas. El nodo 1 ya tiene salidas (fila 4: G4 y M4) y entradas (columna D: D3), por lo que se efectúa la operación de G4 + M4 - D3.



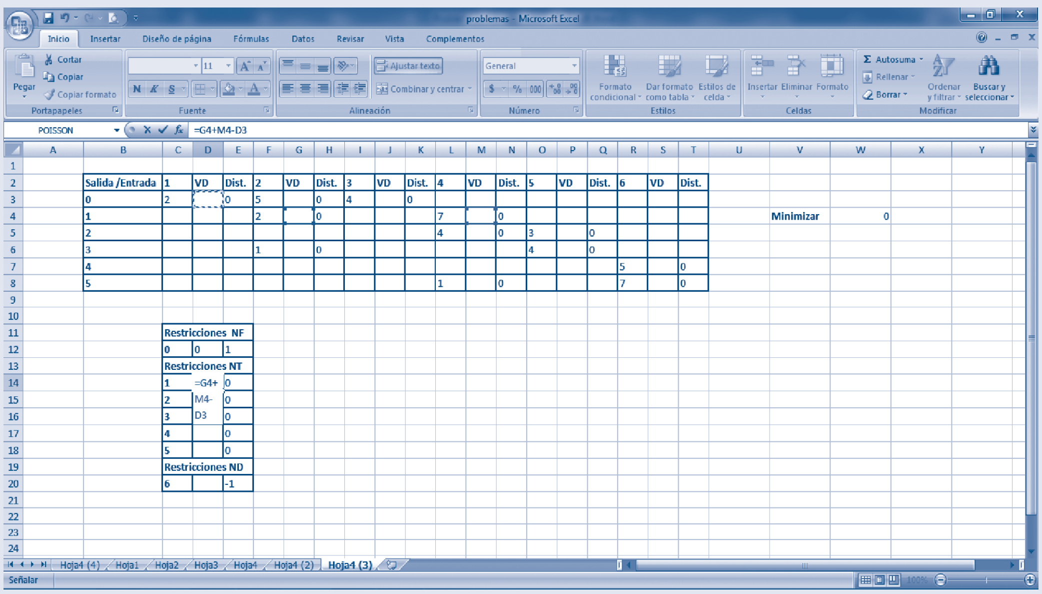


Figura A.51

Enseguida, de manera similar, se construyen las restricciones de los nodos transbordo y el nodo demanda. Se resuelve el problema, ir a *Datos* en el Menú y luego a la opción *Solver*. Cuando aparece la ventana de los parámetros de Solver, se coloca el valor de la celda objetivo, en este caso W14; en el valor de la celda objetivo se selecciona la opción *Mínimo*, y en el campo *Cambiando las celdas* se colocan todas las celdas que contienen a las variables de decisión separadas por comas.

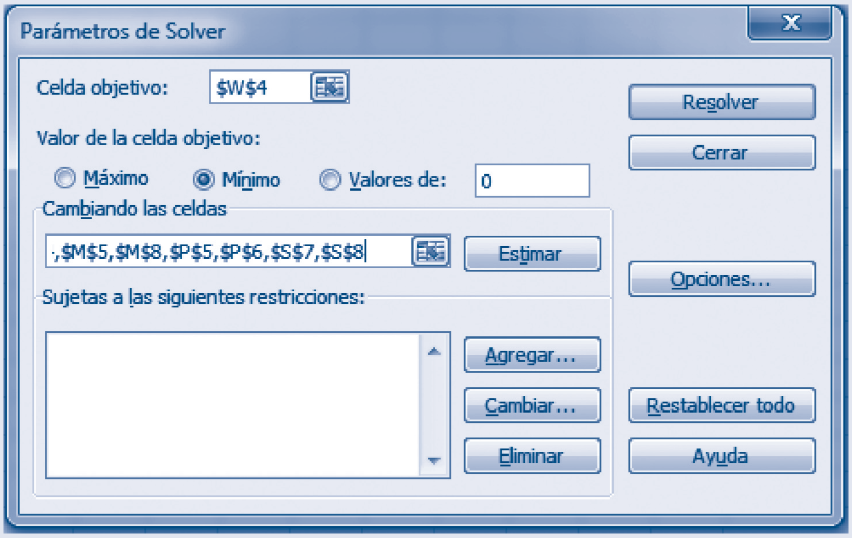


Figura A.52

Enseguida, se construyen las restricciones a través del botón *Agregar;* por ejemplo, la restricción del nodo F1 se realiza utilizando las celdas restricción construidas anteriormente, se selecciona *Agregar* y se introducen todas las restricciones para cada nodo; al final se da clic en *Aceptar.*

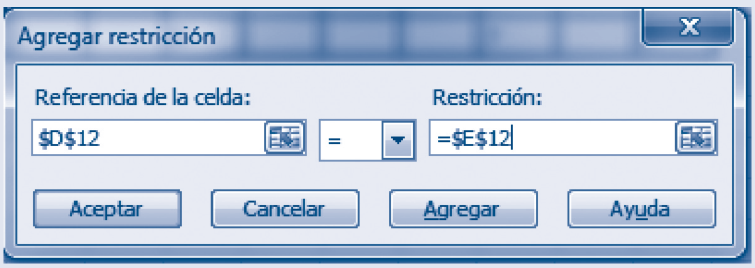


Figura A.53

Una vez que se colocan todas las restricciones, la ventana se debe ver como en la figura A.54.

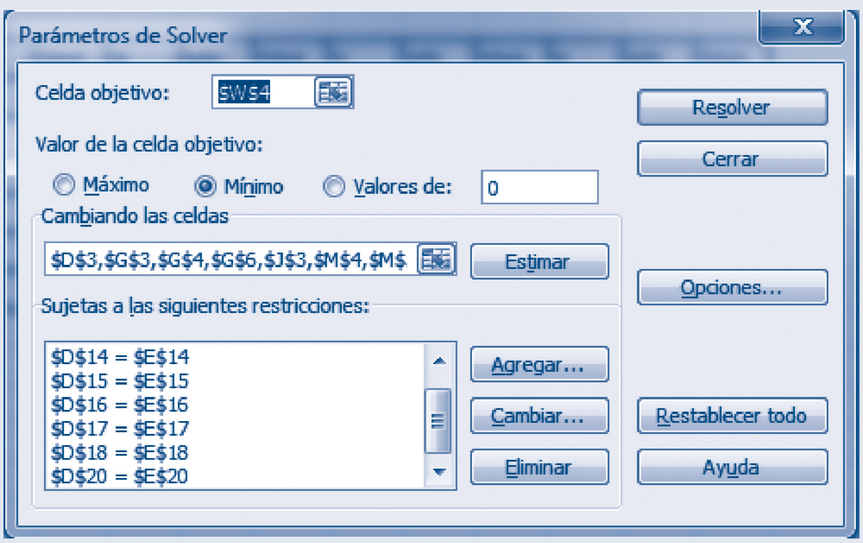


Figura A.54

Con el botón Opciones se especifica *Adoptar modelo lineal* y *Adoptar no negativos*. Por último, se selecciona el botón *Resolver* donde se acepta utilizar la solución encontrada en el Solver.

Figura A.55

La solución se muestra en la figura A.56.

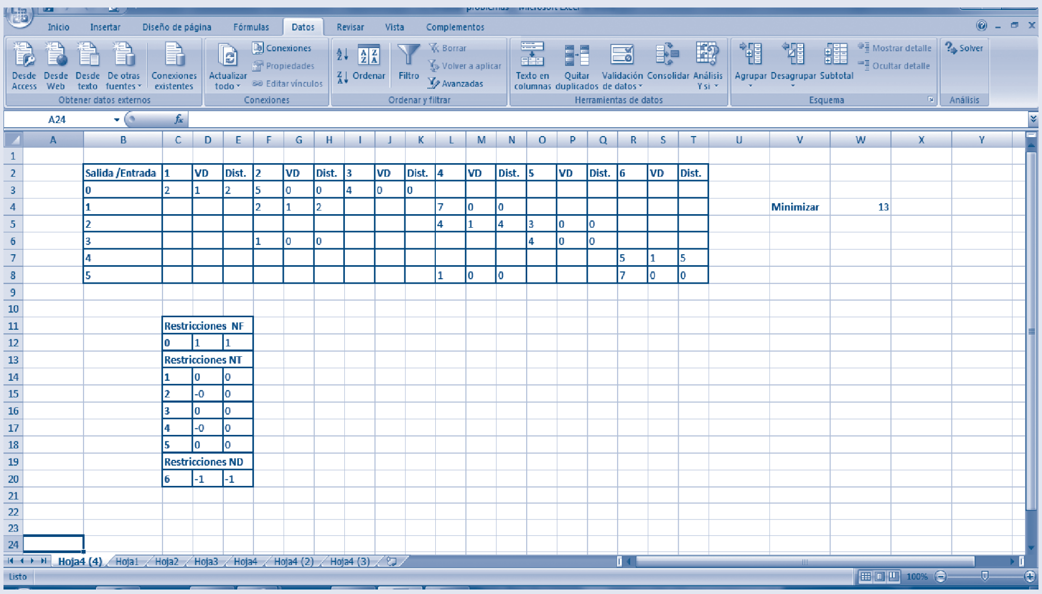


Figura A.56

Del nodo 0 se pasa al nodo 1 (D3), del nodo 1 al nodo 2 (G4), del nodo 2 al 4 (M5) y del nodo 4 al nodo 6 (S7). Todas las restricciones se cumplen con una distancia de 13 kilómetros.

Problemas para resolver

1. Una compañía suministra bienes a tres clientes, de los cuales cada uno requiere 30 unidades. La compañía tiene dos almacenes. El almacén 1 tiene 40 unidades y el almacén dos, 30 unidades disponibles. Los costos de enviar una unidad desde el almacén al cliente se muestran en la tabla A.3. Es importante resaltar que hay una penalización por cada unidad de demanda no suministrada al cliente: con el cliente 1 se incurre en un costo de penalización de $90; con el cliente 2 de $80, y con el cliente 3 de $110. Formular un problema de transporte equilibrado para minimizar la suma de escasez y costos de envío.

Tabla A.3

DE/A	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3
Almacén 1	$15	$35	$25
Almacén 2	$10	$50	$40

Solución

Del almacén 1 al cliente 2, 10 unidades; del almacén 1 al cliente 3, 30 unidades y del almacén 2 al cliente 1, 30 unidades. El cliente 2 no recibirá 20 unidades.

2. Respecto al problema anterior, supóngase que podrían comprarse unidades extra y enviarse a cualquier almacén con un costo total de $100 por unidad y que se debe satisfacer la demanda de los clientes. Formular un problema de transporte equilibrado para minimizar la suma de costos de compra y envío.

Solución

Del almacén 1 al cliente 2, 10 unidades; del almacén 1 al cliente 3, 30 unidades; y del almacén 2 al cliente 1, 30 unidades. Se comprarán 20 unidades para satisfacer al cliente 2.

3. Un banco tiene dos sitios en los que se procesan los cheques. El sitio uno tiene capacidad para procesar 10 000 y el sitio dos, 6 000 cheques por día. El banco procesa tres tipos de cheques: vendedor, salario y personal. El costo de procesamiento por cheque depende del sitio. Por día deben procesarse 5 000 cheques de cada tipo. Formule un problema de transporte equilibrado para minimizar el costo diario de procesar los cheques.

Tabla A.4

	Sitio (c)	
Cheques	1	2
Vendedor	5	3
Salario	4	4
Personal	2	5

Solución

Se minimiza con un costo de $45 000.00; del sitio 1 se producen 5 000 cheques para salario y 5 000 para personal; del sitio 2 se producen 5 000 cheques para vendedor y están este sitio tiene capacidad para producir 1 000 cheques más.

4. Supóngase que una persona va a hacer un viaje en auto a otra ciudad que nunca ha visitado. Antes de salir, estudia un plano para determinar la ruta más corta a su destino. Según la ruta que elija, hay otras cinco ciudades (llamadas A, B, C, D, E) por las que puede pasar en el camino. El plano muestra las millas de cada carretera que tiene una conexión directa entre dos ciudades. Estas cifras se resumen en la tabla A.5, donde un guión indica que no hay conexión directa. Formular este problema como uno de ruta más corta trazando una red donde los nodos son ciudades, los arcos carreteras y los números la distancia en millas.

Tabla A.5

	Millas entre ciudades adyacentes					
Pueblo	A	B	C	D	E	Destino
Origen	40	60	50	----	----	----
A		10	----	70	----	----
B			20	55	40	----
C				----	50	----
D					10	60
E						80

Solución

La ruta es Origen-A-B-D-Destino y la distancia mínima es de 165 millas.

5. Un vuelo está a punto de despegar de Seattle sin escalas a Londres. Existe cierta flexibilidad para elegir la ruta precisa, según las condiciones del clima. La siguiente red describe las rutas posibles consideradas, donde SE y LN son Seattle y Londres, respectivamente, y los otros nodos representan varios lugares intermedios. El viento a lo largo de cada arco afecta mucho el tiempo del vuelo (y, por ende, el consumo de combustible). Con base en el informe meteorológico actual, junto a los arcos en la figura A.57 se muestran los tiempos de vuelo (en horas). Debido al alto costo de combustible, la administración ha establecido la política de elegir la ruta que minimiza el tiempo total de vuelo. Formular este como un problema de la ruta más corta.

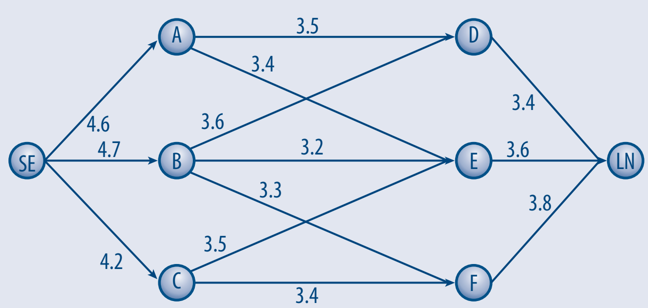


Figura A.57

Solución

La ruta que minimiza el tiempo total de vuelo es SE-C-E-LN con un tiempo de 11.3 horas.

6. Supóngase una empresa que fabrica dispositivos mecánicos en dos fábricas diferentes, una en Memphis y otra en Denver. La fábrica de Memphis puede producir 150 dispositivos por día, mientras quela de Denver 200. Los dispositivos se envían por aire a clientes en Boston y los Ángeles. Los clientes de cada ciudad requieren 130 dispositivos por día. Debido a la desregulación de las tarifas áreas, la empresa cree que puede ser más barato enviarla a Nueva York o Chicago, y de ahí a sus destinos finales. Los costos se muestran en la tabla A.6. Formular la ruta más corta.

Tabla A.6

De/A	Memphis	Denver	Nueva York	Chicago	Los Ángeles	Boston
Memphis	0	-------	8	13	25	28
Denver	-------	0	15	12	26	25
Nueva York	-------	-------	0	6	16	17
Chicago	-------	-------	6	0	14	16
Los Ángeles	-------	-------	-------	-------	0	
Boston	-------	-------	-------	-------	-------	0

Solución

De Memphis a Nueva York y posteriormente a Los Ángeles, 130; de Denver directamente a Boston, 130; Memphis conserva 20 y Denver 70.

7. General Ford tiene dos plantas, dos almacenes y tres clientes. Las plantas están en Detroit y Atlanta, los almacenes en Denver y Nueva York, y los clientes en Los Ángeles, Chicago, y Filadelfia. Los automóviles se producen en las plantas, luego se envían a los almacenes y, por último, a los clientes. Detroit puede producir 150 automóviles y Atlanta 100 automóviles por semana. En Los Ángeles requieren 80 automóviles por semana, en Chicago, 70; y en Filadelfia, 60. Cuesta 10 000 dólares producir un automóvil en cada planta. El costo de envío de un automóvil entre dos ciudades se observa en las tablas A.7 y A.8. Determinar cómo satisfacer las demandas semanales a un costo mínimo.

Tabla A.7

De/A	Denver	Nueva York
Detroit	1253	637
Atlanta	1398	841

Tabla A.8

De/A	Los Ángeles	Chicago	Filadelfia
Denver	1059	996	1691
Nueva York	2786	802	100

Solución

De Detroit a Denver, 20; de Detroit a Nueva York, 130; de Atlanta a Denver, 60; de Denver a Los Ángeles, 80; de Nueva York a Chicago, 70; de Nueva York a Filadelfia, 60; Atlanta conserva 40 con un costo mínimo de $338610.00.

8. Se reúne a un equipo de relevos para una competencia de 400 metros. Cada deportista debe nadar 100 metros de brazada de pecho, dorso, mariposa o estilo libre. El entrenador cree que cada nadador obtendrá los tiempos, en segundos, dados en la tabla siguiente. Para reducir el tiempo de la competencia, ¿Qué nadadora debe nadar cada estilo?

Tabla A.9

Nadadora/ Estilo	Libre	Pecho	Mariposa	Dorso
Gabriela Hernández	54	54	51	53
Marcela Salinas	51	57	52	52
Julia Martínez	50	53	54	56
Claudia Gómez	56	54	55	53

Solución

Gabriela Hernández, mariposa; Marcela Salinas, dorso; Julia Martínez, libre y Claudia Gómez, pecho; con un tiempo total de 206 segundos.

9. Se cuenta con dos depósitos para suministrar agua a tres ciudades. Cada depósito puede suministrar hasta 50 millones de galones por día. A cada ciudad le gustaría recibir 40 millones de galones por día. Por cada millón de galones por día de demanda sin satisfacer se aplica una penalización. En la ciudad 1 es de $20, en la 2 de $22 y en la 3 de $23. El costo de transportar un millón de galones de agua desde cada depósito a cada ciudad se ilustra en la tabla A.10. Minimizar el costo de transporte.

Tabla A.10

De/A	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3
Depósito 1	7	8	10
Depósito 2	9	7	8

Solución

Del depósito 1 a la ciudad 1, 20; del depósito 1 a la ciudad 2, 30; del depósito 2 a la ciudad 2, 10; del depósito 2 a la ciudad 3, 40; no se surtirán 20 unidades a la ciudad 1.

10. Una compañía suministra bienes a tres clientes y cada uno requiere 30 unidades. La compañía tiene dos almacenes. El almacén 1 tiene 40 unidades disponibles y el almacén 2 tiene 30. Los costos de enviar una unidad del almacén al cliente se muestran en la tabla A.11. Existe una penalización por cada unidad de demanda no suministrada al cliente: con el cliente 1 un costo de $90.00, con el 2 de $80.00 y con 3 de $110.00. Formular un problema de transporte equilibrado para minimizar la suma de escasez (los costos de la demanda no suministrada) y los costos de envío.

Tabla A.11

De/A	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3
Almacén 1	15	35	25
Almacén 2	10	50	40

Solución

Del almacén 1 a la ciudad 2, 10; del almacén 1 a la ciudad 3, 30; del almacén 2 a la ciudad 1, 30; no se surtirán 20 a la ciudad 2.

11. La figura A.57 representa diversos flujos que se pueden producir a través de la red de una planta de tratamiento de aguas residuales, los números en los arcos representan la máxima cantidad de flujo (en toneladas de agua residuales por hora) que se pueden acomodar. Formular un modelo de PL para determinar el flujo máximo de aguas residuales en toneladas por hora que pueden ser procesados por esta planta.

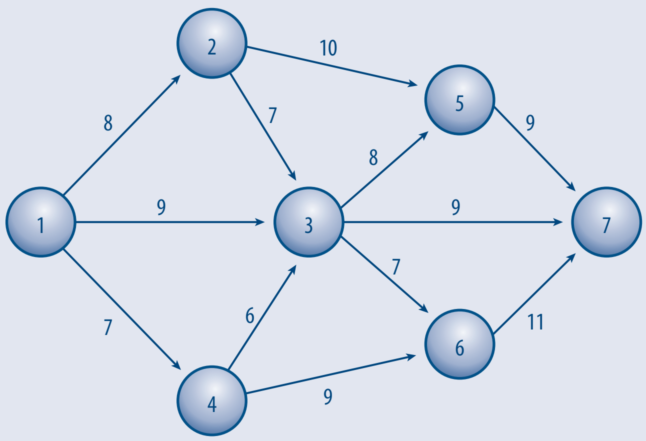


Figura A.58

Solución

Flujo máximo = 24 toneladas de aguas residuales por hora.